Prime 9 lezioni ripasso generale nel calcolo, inizio vero e proprio lezioni con prof Di Cerbo

- Complementi ✓
- Limiti (T. ponte unico lim) ✓
- Successioni ✓
- Derivate (Teoremi del calcolo differenziale) + Taylor con resto di Peano $o(x^n)$
- Integrali (Riemann, medio integrali sup F e inf F, Torricelli)
- Equazioni differenziali (lineari, a coeff. costanti, di secondo ordine)
- Integrali impropri
- Serie numeriche
- Studio di funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

— O — O —

Sia z un numero dato dal p. cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $z = (a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$. Esistono tante coppie quanti sono i numeri contenuti nel campo $\mathbb{R}$ (infiniti). Le infinite "coppie ordinate di numeri reali" costituiscono a loro volta un campo, il campo dei Numeri Complessi

$$\mathbb{C} = \{ z = (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} \qquad a = \mathrm{Re}\, z \; ; \; b = \mathrm{Im}\, z$$

$\{ \mathbb{R}^2, +, \cdot \}$ la terna qui rappresentata definisce le operazioni del campo

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ / $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$\exists\, \bar{z} \in \mathbb{C}$ / $\bar{z} = (a, -b)$

$\exists\, \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ / $z^{-1} = \frac{1}{(a, b)}$

$\exists\, z \in \mathbb{C}$ / $z_1 \cdot z = z_1$ [$z = (1, 0)$]

$\exists\, z \in \mathbb{C}$ / $z_1 + z = z_1$ [$z = (0, 0)$]

In quanto campo gode di tutte le proprietà di questa struttura

- Commutatività
- Associatività
- Omogeneità
- Esistono gli inversi che al prodotto danno 1
- Esistono gli opposti che alla somma danno 0
- Esistono i fattori neutri per somma e prodotto

In più

- Esiste il coniugato (z) tale che $Im\, z = 0$, con $z \in \mathbb{C}$

Noto che:

- $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{C}_0 = \{z = (a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Il sottoinsieme $\mathbb{C}_0$ è formato dagli elementi di $\mathbb{C}$ per i quali è verificato che $z = \bar{z}$ e che l'insieme $\mathbb{C}_0$ sia niente altro che $\mathbb{R}$, perciò $\mathbb{C}_0 \equiv \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

- $z \in \mathbb{C}$

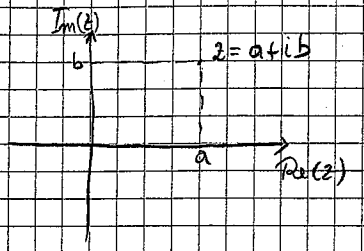
$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = \boxed{a + ib}$$

($a \in \mathbb{R}$ ↕, i ↕, $b \in \mathbb{R}$ ↕)

$$z = (a,b) = a + ib$$

master COPY

Piano di Gauss



L'"ascissa" è identificata da $Re(z)$ e l'"ordinata" da $Im(z)$

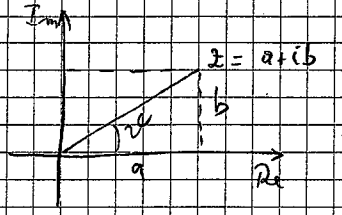
modulo del complesso

$z \in \mathbb{C}$

$z = (a, b)$

$\rho = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$ "gli spazi in $\mathbb{C}$ sono metrici"

forma trigonometrica



$b = \rho \sin \vartheta$

$a = \rho \cos \vartheta$

$$a + ib = \rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

Formula di De Moivre

Sia $z = a + ib = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \in \mathbb{C}$

$$z^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$$

Formule di Eulero

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta \qquad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \\ \sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \end{cases}$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$ Identità di Eulero

master COPY

— o — o —

Radici

Sia $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$z \in \mathbb{C}$ si dice radice n-esima di w se

$$\underline{\underline{z^n = w}}$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $w \in \mathbb{C}$, $w = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$

Sia $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

allora $\exists$ n-radici complesse distinte z_k, $k = 1, \dots, n$ di w

$$z_k = r(\cos(\vartheta_k) + i \sin(\vartheta_k))$$

$$\begin{cases} r = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \vartheta_k = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

master COPY

Successioni Numeriche

Una successione è una funzione dei naturali nei reali

$$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \qquad n \to f(n) = a_n$$

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

master copy

Es.

$a_n = \frac{1}{n}$, $n \neq 0$ $\quad \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$

$a_n = n^2$ $\quad \{n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$

$a_n = (-1)^n$ $\quad \{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\Big] \{a, b, c, \dots\}$

- Si dice che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa definitivamente una certa proprietà se

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / la proprietà è vera $\forall\, n \geq n_0$

Def. (limite di una successione)

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Sia $l \in \mathbb{R}$

diremo che la successione converge ad l per $n \to +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$

se $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geq n_0 \;,\; |a_n - l| < \varepsilon}$ Con $\varepsilon \to 0^+$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \; |a_n - l| < \varepsilon \quad \text{definitivamente}}$ Bramanti, Pagani, Salsa