Teoria degli insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti fisici, astratti etc... che si chiamano elementi dell'insieme. Un insieme si indica con una lettera maiuscola ad esempio A.

Descrizione di un insieme:

- elenco = $\{\star, \Delta, 0, 2, \sqrt{3}\}$ → vale solo per gli insiemi finiti
- proprietà = $\{$numeri naturali dispari $\leq 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Simboli logici

$\in$ = appartiene es. $a \in A$ oppure $A \ni a$ $\ni$ → contiene

$\notin$ = non appartiene $A \subseteq B$ $\subseteq$ sottoinsieme $1 \subseteq A$ No! $\{1\} \subseteq A$ Sì!

$\exists$ = esiste $\nexists$ = non esiste

$:$, $|$ = tale che

$\forall$ = per ogni ; per tutti e = e o = oppure

$\Rightarrow$; $\Leftarrow$ = implica es: $P_1 \Rightarrow P_2$ Vuol dire che se è vera P_1 sarà anche vera P_2.

$\Leftrightarrow$ = se e solo se es: $P_1 \Leftrightarrow P_2$ P_1 vale se e solo se vale P_2

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ = numeri naturali 0, 1, 2, 3

$\mathbb{Z}$ = numeri interi 0, 1, −1, 2, −2 ...

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali 3/4, $\sqrt{2}$, 1/2

$\mathbb{R}$ = numeri reali $\pi = 3,14...$

Pari e dispari

$B\{x \in \mathbb{N} \mid x$ è dispari e $0 \leq x \leq 10\}$

Definizione: $x \in$

- $x \in \mathbb{N}$ è dispari se verifica che

$\frac{x}{2} \notin \mathbb{N}$

$\exists h \in \mathbb{N} : x = 2h + 1$ $\quad h = \frac{x}{2} - 1$

- $x \in \mathbb{N}$ è pari se verifica che

$\exists h \in \mathbb{N}$ se $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$

Operazioni insiemistiche

- $\cup$ = unione di insiemi

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ <u>oppure</u> $x \in B\}$ ◯◯

→ deve essere vera ALMENO una delle due (VEL)

- $\cap$ = intersezione di insiemi

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ <u>e</u> $x \in B\}$ ◯◯

↓ insieme degli elementi

↖ devono essere vere entrambi sono gli elementi presenti in A e B

- $\varnothing$ = insieme vuoto (insieme che non contiene alcun elemento)
- $A \setminus B$ A meno B $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ e $x \notin B\}$

◯◯

tutti gli elementi che stanno in A ma non in B

- Δ = differenza simmetrica

$A \Delta B = \{x \mid \{x \in A$ e $x \notin B\}$ o $\{x \in B$ e $x \notin A\}$



$(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$\varnothing$ = è simile ad un elemento neutro che serve per capire se gli insiemi sono uguali.

$A \cap B = \varnothing$ A e B sono disgiunti (non hanno elementi in comune)

$\varnothing \subseteq A$

$A \subseteq B$ → contenuto $\supseteq$ contiene

se $x \in A \Rightarrow x \in B$

$A = B$ ci dice che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

Es: $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

~~$A \subseteq B$~~ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{3, 6, 9\}$

Es. $A \cup B = \{0, 6\}$

Es. $A \setminus B$ 

$x \in A$ ma $x \notin B$

Es. $A \times B$

$A = \{8, k\}$ $B = \{1, 2\}$

$P = A \times B = \{(8,1)(8,2)(K,1)(K,2)\}$

- $\times$ = prodotto cartesiano

dati A e B $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ e $b \in B\}$

N.B. $A \times B \neq B \times A$

se $|A| = m$ e $|B| = n$

$|A \times B| = m \times n$

- Insieme delle parti di un insieme dato

Sia A un insieme qualsiasi $\mathcal{P}(A) = \{B$ insieme, $B \subseteq A\}$

» insieme fatto dai suoi sottoinsiemi

$A = \{\Delta, \square, 1\}$: possibili sottoinsiemi di A sono $\varnothing$, $\{\Delta\}$; $\{\square\}$; $\{1\}$; $\{\Delta, \square\}$;

$\{\Delta, 1\}$; $\{\square, 1\}$, $\{\Delta, \square, 1\}$ $\varnothing \in A$ NO! $\varnothing \notin A$ OK

↳ sarebbe A

Δ = elemento di A $\{\Delta\}$ = sottoinsieme di A che contiene solo l'elemento Δ

Cardinalità

Se A è un insieme finito (vuol dire che A è descritto come collezione di un numero finito limitato da elementi)

A = numero dei suoi elementi, in questo caso di A.

Esercizio

Dato A insieme finito di elementi stabilire se:

- P(A) è finito e quanto vale #P(A)

dato B, altro insieme finito stabilire se:

- A×B è un insieme finito e quanto vale #(A×B)

Risoluzione

- Sia n la cardinalità di A $n = \#(A)$ e che $n \geq 1$

$A = \{a\}$

$P(A) = \{\emptyset, A\}$

se $A = \{a_1, a_2\}$ $\quad P(A) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1 a_2\}\}$

$\#P(A) = 2^{\#A}$

sottoinsiemi = $\emptyset$ $\{-,-\}$ $\{a_1\}$ $\{+,-\}$ le scelte possibili sono 2.
$\{a_2\}$ $\{-,+\}$ $\{a_1, a_2\}$ $\{+,+\}$

- $B = \{t, +, +\}$

$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} = n \cdot m$

$\#(A \times B) \Rightarrow \#(A) \cdot \#(B)$

Se A ha zero elementi, equivale a dire $A = \emptyset$

Se A e B sono vuoti ci risulta un altro insieme vuoto

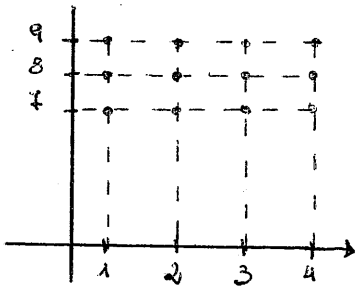
Esercizio di Georgiev

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad B = \{7, 8, 9\}$

$A \cap B = \emptyset$ $\quad \#A \cup B = \#A + \#B \quad 4 + 3 = 7$

↓
insiemi disgiunti

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$



3 possibilità in coordinate $x = 1, 2, 3, 4$

$\underbrace{3+3+3+3}_{\#A} = \underbrace{3 \cdot 4}_{\#B \cdot \#A}$

N.B.
Se $\#A = a$, allora $\#P(a) = 2^a$
Perché?
se $A: \{x, x, x \ldots x\}$
si si si ... si
no no no no per ogni elemento scelgo si o no e le possibili scelte sono 2^a

Insiemi numerici particolari

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ permettono addizione, sottrazione e moltiplicazione

$\mathbb{Q}$ permette tutte le operazioni $\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

$\mathbb{R}$ si identifica con una retta infinita di cui si conosce l'inizio (l'origine) e il verso di percorrenza

Proprietà dei numeri reali

$\mathbb{R}$ è dotato di 2 operazioni + somma e · prodotto

$x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow x+y$ vuol dire aggiungere

$x, y \in \mathbb{R} \longrightarrow x \cdot y$ vuol dire duplicare, triplicare ...

- proprietà della somma
  - $x + y = y + x$
  - $x + 0 = 0 + x \Rightarrow x$
  - $x + (-x) = 0$
  - $x + y + z = x + (y+z) = (x+y) + z$
- proprietà del prodotto
  - $x \cdot y = y \cdot x$
  - $x \cdot 1 = 1 \cdot x \Rightarrow x$
  - se $x \neq 0 \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \left(\frac{1}{x} = x^{-1}\right)$ #
  - $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

collegamento tra le due operazioni

- $x(y+z) = xy + xz$

Dati due numeri reali si può sempre stabilire se $x \leq y$

- proprietà dell'ordinamento
  - se $x \leq x \quad \forall x$
  - se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$
  - se $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

relazioni tra $\leq$ e $+, \cdot$

se $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

se $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq z$ si ha $x \cdot z \leq y \cdot z$

N.B. FALSO se $z \leq 0$

Def: x si dice positivo se $0 \leq x$

conseguenza delle proprietà dette

$$0 \leq x \Rightarrow -x \leq 0$$

sommo $-x$

$x \leq y \Rightarrow$ se $z \leq 0$ si ha $y \cdot z \leq x \cdot z$

Notazione

$x < y$ vuol dire le due verità $x \leq y$ e $x \neq y$

Memo per le disequazioni

$$1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq -1 \quad e \quad -1 \leq -\frac{1}{2}$$

Proposizioni o predicati

Le proposizioni sono verità che possono dipendere da altre variabili

$0 \leq 1$

$\Rightarrow$ (implica) è la relazione tra' proprietà

Esempio

$n \in N$ pari è un'affermazione

Vale a dire $\exists h \in N$ tale che $n = 2h$

implica ci da delle affermazioni naturali per cui se n è pari $n+1$ è dispari perché $n = 2h \Rightarrow n+1 = 2h+1$

Domanda:

- n è un numero pari naturale $\Rightarrow n \cdot n$ = numero naturale pari?

  Si, perché $n \cdot n = 2h \cdot 2h = 2 \cdot 2h \cdot h$

- n pari $\Rightarrow n^2 - n$ pari?

  $n^2 - n = n(n-1)$

  $2h(2h-1)$

master COPY