INDICE

1→ Teoria degli insiemi
operazioni fra insiemi
prodotto cartesiano
2→ cardinalità
proprietà di somma, prodotto e dell'ordinamento
3→ funzione tra insiemi
immagine, restrizione, controimmagine, grafico
4→ funzione iniettiva, surgettiva, invertibile, inversa, crescente, decrescente, strettamente cre. decr., pari, dispari, periodica
composizione
valore assoluto
8→ estremo superiore
completezza di $\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$
A limitato superiormente
maggiorante
9→ massimo
proprietà estremo superiore
estremo inferiore + proprietà
12→ complessi
somma e prodotto su $\mathbb{C}$ (proprietà)
coniugio + proprietà
13→ piano $\mathbb{C}$
forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$
identità di Eulero
14→ forma esponenziale di $z \in \mathbb{C}$
calcolo radici ennesime di $z \in \mathbb{C}$
21→ principio di induzione
disuguaglianza di Bernoulli
22→ fattoriale
coefficiente binomiale
binomio di Newton
23→ successione di numeri reali
24→ limite di una successione
successione crescente/decr.
Teorema monotonia
25→ dimostrazione T monotonia
Teorema confronto + corollario
26→ Teorema somma/prodotto lim
36→ Criterio del rapporto + dim.
38→ confronto tra infiniti
39→ pt. 2 Criterio rapporto + dim
intorno di un punto
40→ punto di accumulazione
limite di funzione
Teorema funz + succ
Algebra dei limiti
parte intera di x
50→ Teorema composizione limiti
funz. continua
Teorema somma, prodotto funz. cont
51→ Teorema degli zeri + Dim.
52→ corollario T. degli zeri (Teorema degli estremi) + dim
insieme chiuso, compatto
53→ sottosuccessione
Teorema delle sottosuccessioni + dim.
Teorema di Weierstrass + dim
54→ Teorema funz. uniformemente continua
56→ derivata
Teorema f derivabile ⇒ f. continua + dim
57→ retta tangente
Teorema tangente ⇔ derivata + dim
Teorema derivata somma e prodot. + dim
Teorema derivata composizione
58→ Teorema derivata $1/f$ + dim
Teorema derivata f^{-1}
massimo e minimo locale
Teorema di Fermat + dim
59→ Teorema di Rolle + dim
Teorema di Lagrange + dim
Teorema $f' \geq 0 \Rightarrow f$ crescente + dim
60→ Teorema di de l'Hopital
conseguenza T + dim
conseguenza 2
61→ asintoto verticale, orizzontale, obliquo
62→ punti di discontinuità
punti di non derivabilità
68→ derivata di ordine > 1
Formula di Taylor
resto di Peano
69→ notazione di Landau
proprietà di $o(1)$
Taylor + Landau
71→ Taylor + resto di Lagrange
Teorema $f''(x)$ + pnt di minimo e massimo + dim
72→ funzione convessa, concava
Proposizione f convessa ⇒ f continua
Teorema convessità + dim
73→ punto di flesso
76→ deg. infinitesimi stesso ordine

MASTER 6831
Tel. 050 83.21.26
Cell 366 963.74.45

79→ Integrale di Riemann
Teorema f continua ⇒ f integr.
Teorema f crescente ⇒ f integr
80→ dim Teoremi pag. 79
proprietà dell'integrale
def. alternativa continuità e
funz. uniformemente continua
81→ Teorema Torricelli
Teorema primitive + integr + dim
82→ generalizzazione Teorema fond.
calcolo integrale
83→ conseguenze T. Lagrange + dim
integrale per parti
cambio di variabile
84→ integrale indefinito
91→ equazioni differenziali lineari
di ordine n
Teorema unicità della soluzione
92→ eq. omogenee
Teoremi soluzioni
eq. lineari 1° ordine
94→ eq lineari 2° ordine
problema di Cauchy
103→ integrale improprio
104→ Teorema confronto + dim
integrale convergente, divergente
105→ Teorema integrale |f|
106→ assolutamente integrabile, in senso
improprio
108→ serie numeriche
serie convergente, divergente,
indeterminata
Teorema $\lim a_n = 0$ + dim
Teorema $a_n \geq 0$ + dim
109→ serie armonica, geometrica
113→ Teorema collegamento integrale
e serie + dim
Teorema confronto
Teorema confronto asintotico
114→ criterio radice
criterio del rapporto + dim
serie converge assolutamente
Teorema convergenza assolute
115→ dim del Teorema
126→ serie a termini di segno variabile
Criterio di Leibniz + dim
corollario
127→ serie di potenze
Teorema
128→ dim Teorema
corollario
Teorema raggio + dim
131→ Successione di Cauchy
Teorema spazio completo

MASTER COPY
Tel. 050 3121426
Cell. 388 9837745
COPISTERIA

insieme: collezione di oggetti, numeri ecc (= elementi dell'insieme)
si usano le maiuscole per denominare un insieme
come si descrive un insieme? elenco $A=\{*, \Delta, 0, 2, \sqrt{3}\}$ si usa per insiemi finiti
descrizione come proprietà → $B=\{$numeri naturali che sono dispari e minori od uguali a $10\}=\{1,3,5,7,9\}$

Simboli logici: $\in$ = appartiene ($a \in A$) (a
$\ni$ = contiene ($A \ni a$)
$\notin$ = non appartiene
$\exists$ = esiste
$\nexists$ = non esiste
: | = tale che o tali che
$\forall$ = per ogni o per tutti
e = e
o = oppure
$\Rightarrow$ = implica ($\Leftarrow$) (proprietà $P_1 \Rightarrow$ proprietà P_2 = se è vera P_1 allora
$\Leftrightarrow$ = se e solo se ($P_1 \Leftrightarrow P_2 = P_1$ vale se e è anche vera P_2)
$B=\{x \in \mathbb{N} : x$ è dispari e $0 \leq x \leq 10\}$ solo se vale P_2)

$\mathbb{N}$ = numeri naturali 0,1,2 ...
$\mathbb{Z}$ = numeri interi 0, 1, -1, ...
$\mathbb{Q}$ = razionali
$\mathbb{R}$ = reali

Def di numero dispari $x \in \mathbb{N}$ è dispari e si verifica che $x \notin \mathbb{N}$
→ se $\exists h \in \mathbb{N} : x = 2h+1$ (se uso la prima definizione 2 incluso lo 0)
Def di numero pari: $x \in \mathbb{N}$ è pari se $\exists h \in \mathbb{N} : x = 2h$ ($h = \frac{x}{2}$)

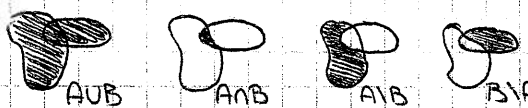
$B=\{x \in \mathbb{N} : \exists h \in \mathbb{N} : x = 2h+1 \text{ e } 0 \leq x \leq 10\}$

Operazioni insiemistiche
$\cup$ = unioni di insiemi ($A \cup B = \{x : x \in A$ o $x \in B\}$)
$\cap$ = intersezioni di insiemi ($A \cap B = \{x : x \in A$ e $x \in B\}$)
$\emptyset$ = insieme vuoto
$\setminus$ = differenza di insieme ($A \setminus B = \{x : x \in A$ e $x \notin B\}$) → come proprietà globale
Δ = differenza simmetrica ($A \Delta B = \{x : x \in A$ e $x \notin B\}$ o $\{x : x \in B$ e $x \notin A\} = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$





$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cap B = \emptyset$ A e B sono disgiunti →



$\subseteq$ = è contenuto ($A \subseteq B$ se $x \in A \Rightarrow x \in B$) $\supseteq$ = contiene
$=$ = uguale ($A = B \rightarrow A \subseteq B$ e $B \supseteq A$)
$\emptyset$ è come sottoinsieme in ogni altro insieme

Prodotto cartesiano $\times$
Dati 2 insiemi A e B $A \times B = \{(a,b) : a \in A$ e $b \in B\}$ ("fare le parti di A" $A \times B \neq B \times A$ a meno che
insieme delle parti di un insieme: sia A insieme $P(A) = \{B$ insieme, $B \subseteq A\}$ $A = B$
$A = \{\Delta, \square, 1\}$ sottoinsiemi possibili: $\emptyset$ → collezione di tutti i sottoinsiemi di A
$\{\Delta\}, \{\square\}, \{1\}$
$\{\Delta, \square\}; \{\Delta, 1\}; \{1, \square\}$
$\{\Delta, \square, 1\}$ che è A stesso
Nota: Δ è elemento $\{\Delta\}$ è sottoinsieme

MASTER COPY Tel. 050 031 2126 Cell. 338 9837745

Cardinalità

Se A è un insieme finito (vuol dire che A è descritto come collezione di un qualsiasi numero limitato di elementi)

allora si chiama $\#A$ = numero dei suoi elementi

Esercizio: Dato A insieme finito di elementi stabilire se l'insieme fatto dai suoi sottoinsiemi è finito e nel caso trovare la sua cardinalità

- dato B insieme finito stabilire se $A \times B$ è un insieme finito e quanto vale $\#(A \times B)$

Risoluzione: sia $n = \#(A)$ e $A \neq \emptyset$

con $n=1$ $A=\{a\}$, sottoinsiemi sono $\emptyset$ e A quindi $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{a\}\}$ $\#\mathcal{P}(A)=2$

con $n=2$ $A=\{a_1 e a_2\}$ " " $\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}$, A $\#\mathcal{P}(A)=4$

con $n=3$ $\#\mathcal{P}(A)=8$ $\rightarrow \#\mathcal{P}(A)=2^n$

→ Come si costruisce B generico sottoinsieme di $A=\{a_1; \dots; a_n\}$?

scegliendo di mettere o meno ogni elemento di A quindi avendo n elementi attuo una scelta fra due possibilità $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots$ n volte $= 2^n$ (ho 2^n scelte possibili quindi 2^n sottinsiemi diversi)

→ se A verifica che $\#A = n$ e $\#B = m \Rightarrow \#(A \times B) = n \cdot m$

$\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$

$\#\mathcal{P}A \times B = \#A \cdot \#B$ se A ha 0 elementi, quindi $n=0$ e $A=\emptyset$ e formo contiuno a volere

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

insiemi numerici: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ = tutte le possibili divisioni fra Naturali

$= \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$

$\mathbb{R}$ = modello astratto che si può identificare con una retta infinita su cui avete fissato l'origine ed il verso di percorrenza

Proprietà dei numeri reali: $\mathbb{R}$ è dotato di due operazioni: somma e prodotto

$x \text{ e } y \in \mathbb{R} \rightarrow x+y$

$x \text{ e } y \in \mathbb{R} \rightarrow xy$

Proprietà della somma:

$x+y = y+x$ (commutatività)

$x+0 = 0+x = x$

$x+(-x) = 0$

$x+y+z = x+(y+z) = (x+y)+z$

Proprietà del prodotto:

$x \cdot y = y \cdot x$

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

con $x \neq 0$ $x \cdot \frac{1}{x} = 1 \left(= x \cdot x^{-1}\right)$

$x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Proprietà condivise $\rightarrow x(y+z) = xy + xz$

→ $\mathbb{R}$ è dotato di un ordinamento cioè dati $x \text{ e } y \in \mathbb{R}$ si può sempre stabilire se $x \leq y$ o $y \geq x$

Proprietà dell'ordinamento

- $x \leq x \ \forall x$
- $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
- $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Relazioni fra $\leq$ e $+, \cdot$:

se $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$ (traslazione) $\forall z \in \mathbb{R}$

se $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}$ con $0 \leq z$ si ha $x \cdot z \leq y \cdot z$ (falso se $z < 0$)

Def x si dice positivo (o non negativo) se $0 \leq x$

Conseguenza delle proprietà:
se $x \geq 0$ allora $-x \leq 0$
se $x \leq y \Rightarrow z \leq 0$ si ha $yz \geq xz$

Notazione
$x < y$ voldire $x \leq y$ e $x \neq y$

Uguaglianze
Uguaglianze preservate
Uguaglianze disuguaglianze

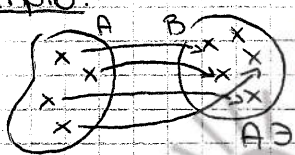
Uguaglianze preservate
$1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1$
$-2 \leq -1$ e $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$

Proposizioni o predicati (tutte le affermazioni che possono o meno essere (affermazione, verità) dipendenti dalla variabile x o y)

$0 \leq 1$ le proposizioni sono proprietà
$\Rightarrow$ relazione fra proprietà
Esempio n pari è un'affermazione $\Rightarrow$ n+1 è dispari
$\hookrightarrow \exists h \in \mathbb{N} : n = 2h$ $\hookrightarrow n = 2h \Rightarrow n+1 = 2h+1$
Domanda: n pari $\Rightarrow$ n·n numero naturale pari? sì
n pari $\Rightarrow n^2 - n$ pari? con $n \geq 1$ sì
$n = 2h$ $n^2 - n = n(n-1) = 2h(2h-1)$
$n \cdot n = 2h \cdot 2h = 2 \cdot 2 \cdot h \cdot h \Rightarrow n^2 = 2h^2$

27-9

Funzione tra insiemi: dati A e B qualsiasi $f: A \to B$ la funzione è una legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B detto $f(a)$
Esempio:



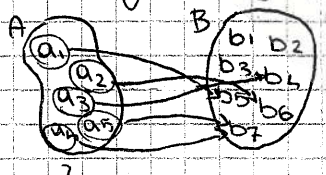
A si dice Dominio di f
B si dice Codominio di f
$A \ni a \longmapsto f(a) \in B$
Si dice immagine di f $Im(f) = \{b \in B : \exists a \in A : f(a) = b\}$ o $R(f)$
$Im(f) \subseteq B$ è sottoinsieme di B

Esercizio: considerato l'insieme $D = \{f : A \to B, \text{funzioni}\}$ $A, B \neq \emptyset$ se $\#A = n$ e $\#B = m$ quante sono le funzioni?

Se considero $\emptyset \neq C \subseteq A$ si definisce la restrizione di f a C ($f_{|C}$) la funzione $f_{|C} : C \to B$ definita come $f_{|C}(c) = f(c)$ $\forall c \in C$
f ristretto a C

Si dice controimmagine di E attraverso f ($E \neq \emptyset \subseteq B$, sottoinsieme) è l'insieme $f^{-1}(E) = \{a \in A : f(a) \in E\}$ può essere vuoto

Esempi:



$f(a_1) = b_3$
$f(a_2) = b_6$
$f(a_3) = b_4$
$f(a_4) = b_7$
$f(a_5) = b_7$

$Im(f) =$
$E = \{b_1\} \to f^{-1}(E) = f^{-1}(\{b_1\}) = \emptyset$
$E = \{b_2, b_4, b_5\} \to f^{-1}(E) = \{a_1, a_3\}$

$C = \{a_1, a_4, a_5\}$ dove $f(a_1), \ldots$
$f_{|C} : C \to B$ è definita $f_{|C}(a_1) = b_5$, $f_{|C}(a_4) = b_7$, $f_{|C}(a_5) = b_7$

D: Si dice grafico di f l'insieme $G(f) = \{(a, b) : a \in A, b \in B \text{ e } f(a) = b\} \subseteq A \times B$ (è un sottoinsieme)
$\to$ grafico della funzione dell'esempio: $G(f) = \{(a_1, b_3), (a_2, b_6), (a_3, b_4), (a_4, b_7), (a_5, b_7)\}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1					
b_2					
b_3	X				
b_4			X		
b_5					
b_6		X			
b_7				X	X

$G(f_{|C}) = \{(a_1, b_3), (a_4, b_7), (a_5, b_7)\}$