Esempio 1

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$ pongo $y = x^2$ Quando $x \to$ $y \to 0$

$= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$

Esempio 2

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - 1}{x} =$ $\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x}$ $\cdot$ $\frac{\arctan x}{x} \to 1$

$y = \arctan x$

$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

Esempio 3

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$ $y = \cos x$

$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ NO! perché pongo $y = \cos x$ e Quando $x \to 0$ ho $y \to 1$ quindi diventa:

$\lim_{y\to 1} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} = \operatorname{sen} 1$ (funzione continua)

Esempio 4

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(7x)}{x^2} = 49$

$\frac{\operatorname{sen}^2(7x)}{x^2} = \left[\frac{\operatorname{sen}(7x)}{x}\right]^2 = \left[\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right]^2 \cdot 49 = 49$

$y = 7x \to 1$

Sottosuccessione

a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 ....

Brutalmente la sottosuccessione significa pescare termini da una successione.

master COPY

Esempio 1

- $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad n_k = 2k$ $\quad a_{2k} = \frac{1}{4k^2}$ sottosucc. termini di indice pari
- $n_k = 2k+1$ $\quad a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2}$ Sottosucc. termini di indice dispari
- $a_n = 2^n$ $\quad n_k = 3k$ $\quad a_{n_k} = 2^{3k} = 8^k$ sottosucc indici multipli di 3

Si prendono gli indici $n_k \to +\infty$ ma non necessariamente crescenti

Oss. Rendendo n_k strett. cresc., si ha che

$$n_k \geq k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Teorema (limite di sottosuccessione). Sia a_n una successione

Supponiamo $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

Allora ogni sottosuccessione $a_{n_k} \to \ell$

master COPY

Esempi classici

$a_n = (-1)^n$ non ha limite

$a_{2k} \to 1$

$a_{2k+1} \to -1$

a_{n^2} non ha limite

$a_{k!} \to 1$

master COPY COPISTERIA

$a_n = (-n)^n$ non ha limite

$a_{2k} \to +\infty$

$a_{2k+1} \to +\infty$ o $-\infty$

Se a_n ammette due sottosuccessioni con diversi limiti $l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ DIVERSI allora a_n non ha limite

Esempio 1

$a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ $\quad a_0 = 0 \; ; \; a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1$

$a_{2k} = \operatorname{sen}(k\pi) = 0 \to 0$

$a_{4k+1} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(4k+1)\right) = \operatorname{sen}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$

Esempio 2

$a_n = n^7 + (-1)^n n^{11}$ non ha limite

$a_{2k} \to +\infty \qquad a_{2k+1} = (2k+1)^7 - (2k+1)^{11} \to -\infty$

Esempio 3

$a_n = n^{11} + (-1)^n n^7$ tende a $+\infty$

Raccolgo n^{11} e ho $\quad a_n = n^{11}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^4}\right)$

$n^{11} \to +\infty$ $\qquad \frac{(-1)^n}{n^4} \to 0$

$-\frac{1}{n^4} \le \frac{(-1)^n}{n^4} \le \frac{1}{n^4}$

Carabinieri

master COPY
master COPY
master COPY COPISTERIA

Esercizi per trovare nuove tecniche

ESERCIZIO 1

$\sqrt{n^2+3n+1} - n \quad [+\infty - \infty]$ → IMPORTANTE

Razionalizzazione: $(\sqrt{A} - \sqrt{B})\ \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

Diventa

$$\frac{n^2+3n+1-n^2}{\sqrt{n^2+3n+1}+n} \to \frac{3}{2} \qquad \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$

ESERCIZIO 2

$$\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-7}}{\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n+91}}$$

Razionalizzo sopra e sotto

$$\frac{(n+3)-(n-7)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-7}} \qquad \frac{\sqrt{2n+5}+\sqrt{2n+91}}{(2n+5)-(2n+91)} = \frac{10}{-86}$$

$$\frac{\sqrt{2n+5}+\sqrt{2n+91}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-7}} \to \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

master COPY

master COPY COPISTERIA

ESERCIZIO 3

$$\sqrt[3]{m^3+2m^2+1} - \sqrt[3]{m^3+5}$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B}$ si ottiene

$A - B = \left(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}\right)$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}$$

IMPORTANTE

$$\frac{m^3 - 2m + 1 - m^3 - 5}{\sqrt[3]{(m^3+2m^2+1)^2} + \sqrt[3]{(m^3-2m+1)(m^3+5)} + \sqrt[3]{(m^3+5)^2}} \to \frac{2}{3}$$

master COPY

ESERCIZIO 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \cos x}{\operatorname{arcsen} x} \qquad \frac{[0]}{[0]}$$

$$\frac{1+x}{\operatorname{arcsen} x} + \frac{1-\cos x}{\operatorname{arcsen} x}$$

$\frac{1+x}{\operatorname{arcsen} x} \to \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1-\cos x}{\operatorname{arcsen} x} \to 0$

$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{x}{\operatorname{arcsen} x} \to 1$ $\qquad$ $x \to 0$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\operatorname{arcsen} x} \cdot \frac{\sqrt{\dots}+1}{\sqrt{\dots}+1} = \frac{1+x-1}{\operatorname{arcsen} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$\frac{1+x-1}{\operatorname{arcsen} x} \to 1$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \to \frac{1}{2}$

ESERCIZIO 5

$$\frac{\sqrt{2m+1} - \sqrt[3]{3m+1}}{\sqrt{m+4}} \to \sqrt{2} \sim \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{m}} \to \sqrt{2}$$

master COPY

Non serve a nulla razionalizzare, comandano i termini in $\sqrt{m}$

master COPY COPISTERIA