- se $A = Id + \alpha[1]$ allora gli autovalori di $[1]$ sono n e 0, gli aut. di Id sono $1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ solo se A è somma di una matrice + Id posso fare somma aut. $\rightsquigarrow 1+\alpha n$
1

- fatt. LU: $\rightarrow \exists!$ se sottomatrici invertibili
$\rightarrow \nexists$ se una ha $\det = 0$ e le altre sono non singolari
$\rightarrow \exists$ ma non! se una $\det \neq 0$ e altre $\det = 0$

- inversa: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \text{cof} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}^T$ dove $\text{cof} = (-1)^{i+j} c_{ij}$ dove $c_{ij} = \det[\ ]$

ELEMENTARI di GAUSS: metto 0 nelle colonne di A $\rightsquigarrow$ FATT. LU: $U = E_{n-1} E_{n-2} \cdots A$; $L = E_1^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1}$

$E = I_n + v e_k^T$; $E^{-1} = I_n - v e_k^T$

MATRICE PERM. $P^{-1} = P^T$

METODI ITERATIVI

$A = M - N$; M invertibile ; $P = M^{-1}N$
$Ax = b \Leftrightarrow x = Px + q$ $\quad q = M^{-1}b$

$\begin{cases} Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \end{cases}$

CONVERGENZA
- sufficiente: $\|P\| < 1$
- necess. e suff.: $\rho(P) < 1$

JACOBI: $M = D$, $N = -L - U$
GAUSS-SEIDEL: $M = D + L$, $N = -U$

applicabilità: $a_{i,i} \neq 0$, $A = D + L + U$

CONVERGENZA
- suff.: A prod. diag. (applic., invert., conv.)

TEOREMA $\exists$ ZERI: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0$, $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi / f(\xi) = 0$

NUMERO CONDIZIONAM. RADICE $c = |f'(\xi)|^{-1}$

$a(1) = a$; $b(1) = b$;
for $k \geq 1$
$c(k) = \frac{(a(k)+b(k))}{2}$
if $(f(a(k)) * f(c(k)) < 0)$
$a(k+1) = a(k)$;
$b(k+1) = c(k)$;
else
$a(k+1) = c(k)$;
$b(k+1) = b(k)$;
end
end
BISEZIONE

prendo punto di mezzo $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ n° di iter.: $K = \lceil 5 + \log_2(b-a) \rceil$

CONVERG. LINEARMENTE
$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} = l < 1 > 0$

CONVERG. QUADRAT.
$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^2} = c$

METODI di ITERAZIONE FUNZ.
$x = g(x)$
convergenza
$\hookrightarrow$ TEO. del PUNTO FISSO
$g:[a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1$, $g(\xi) = \xi \in [a,b]$.
Se $\exists S > 0 / |g'(x)| < 1 \ \forall x \in [\xi - S, \xi + S] = I_\xi$
allora $\forall x_0 \in I_\xi$ la succ. converge

COROLLARIO: // ; se $|g'(\xi)| < 1$ il metodo è localmente convergente

METODO TANGENTI (stesse proprietà it. funz.)
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
convergenza
- LOCALE: $f \in C^2$, $f'(\xi) \neq 0$: metodo localmente convergente e converg. quadratica $(x_k \neq \xi)$
- GRANDE: in $[\xi, \xi+\delta]$ o $[\xi-\delta, \xi]$ si ha $f'(x) \neq 0$, $f(x)f''(x) > 0$ allora il metodo genera succ. conv.

A invertibile:
1) predomin. diagonale
2) $\det A \neq 0$
3) $\exists B / AB = BA = Id$
4) $\exists!$ sol. $Ax = 0$, ovvio $x = 0$
5) rango di $A = n$
6) $Ax = b \Leftrightarrow x = Px + q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (I - P)x = M^{-1}b$
se $(I - P)$ è invertibile $\exists!$ sol.
e quindi anche A è invertibile
7) colonne prive lin. indip.
8) 0 non è autovalore ($\det(A - \lambda Id)$)
(Gerschgorin)

N.B.:
- A^T e A hanno stessi autovalori
- $\det(A^T) = \det(A)$
- A simmetrica:
$\rightsquigarrow A^T A = A^2$ e se λ autovalore di A allora λ^2 è autovalore di A^2
$\rightsquigarrow (A^{-1})^T (A^{-1}) = (A^{-1})^2$; se λ autovalore di A allora $1/\lambda$ è autovalore di A^{-1} e $1/\lambda^2$ è autovalore di $(A^{-1})^2$
- $\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \|P\|^k \leq S$

$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|}$
$=$
$\frac{\|x_k - x\|}{\|x_0 - x\|}$

- Laplace: $(-1)^{i+j}$
- serie geometrica: $\sum_{i=1}^{n} q^i$ — $-1 < q < 1$: $1/1-q$; $q \leq -1$: irrig.; $q \geq 1$: diverge a $+\infty$

$\sum_{i=1}^{k} q^i = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$

- $K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \|LU\|_\infty \|U^{-1}L^{-1}\|_\infty$
- $\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{1}{2} \frac{|f''(\alpha)|}{|f'(\alpha)|}$ $\neq 0 \rightsquigarrow$ quadrat. $= 0 \rightsquigarrow$ alm. quad.

- M è di Gauss se:
$M = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

ARITMETICA del CALCOLATORE

- TEOREMA di RAPPRESENTAZIONE in BASE: sia $B \in \mathbb{N}$, $B > 1$ e dato $X \in \mathbb{R}$, $X \neq 0$, esistono e sono univocamente determinati:
  1) un intero $p \in \mathbb{Z}$ detto ESPONENTE della rappresentazione;
  2) una successione di numeri naturali $\{d_i\}_{i \geq 1}$ con $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_i \leq B-1$ e di non definitivamente uguali a $B-1$, detta MANTISSA (cifre della rappresentazione)

  tali per cui:
  $$X = \text{sign}(x)\, B^p \sum_{i=1}^{+\infty} d_i B^{-i}$$
  RAPPRESENTAZIONE NORMALIZZATA in VIRGOLA MOBILE



- INSIEME dei NUMERI MACCHINA: $F(B,t,m,M) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x = \text{sign}(x) B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i},\ 0 \leq d_i \leq B-1,\ d_1 \neq 0,\ -m \leq p \leq M\}$

  dove: t = CIFRE, B = BASE, $(-m, M)$ = RANGE

  - CARDINALITÀ FINITA: $N = 2B^{t-1}(B-1)(M+m+1) + 1$
  - $\omega = B^{-m-1}$: più piccolo numero di macchina; se $x < \omega$ → RAPPRESENTAZIONE DENORMALIZZATA: no $d_1 \neq 0$; $B^{-m-t} \leq x \leq B^{-m}(B^{-1} - B^{-t})$
  - $\Omega = B^M(1 - B^{-t})$: più grande numero di macchina.

- ERRORE RELATIVO di RAPPRESENTAZIONE: $\varepsilon_x = \dfrac{\tilde{x} - x}{x}$ a causa dell'approssimazione del numero in macchina

  ↳ commesso in seguito ad una operazione di TRONCAMENTO (più grande numero di macchina più piccolo di x) $\tilde{x} = trn(x)$, o di ARROTONDAMENTO (più vicino numero di macchina)

- DISTANZA tra due numeri di macchina consecutivi: $\tilde{y} - \tilde{x} = B^{p-t}$



  ↳ TEOREMA: sia $x \in \mathbb{R}$ con $\omega \leq |x| \leq \Omega$. Allora: $|\varepsilon_x| = \left|\dfrac{trn(x) - x}{x}\right| \leq \underbrace{u = B^{1-t}}_{\text{PRECISIONE di MACCHINA}}$

  ⇓

  RAPPRESENTAZIONE in MACCHINA: $\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x)$ con $|\varepsilon_x| \leq u$



ANALISI DEGLI ERRORI

- ARITMETICA di MACCHINA genera:
  - ERRORE di RAPPRESENTAZIONE: approssimazione dato in ingresso $\rightsquigarrow \tilde{x} = x(1+\varepsilon_x)$, $|\varepsilon_x| \leq u$
  - ERRORE LOCALE dell'OPERAZIONE: approssimazione operazione in macchina $\rightsquigarrow \tilde{x} \oplus \tilde{y} = (\tilde{x}+\tilde{y})(1+\varepsilon_1)$, $|\varepsilon_1| \leq u$ (dipende da singola op.)
    - → si combinano in base all'algoritmo; si utilizza ANALISI al I° ORDINE

⇓

nel calcolo di una generica $f(x)$ troviamo:

- ERRORE INERENTE: sensibilità $f(x)$; perturbazione dato iniziale; indipendente dall'algoritmo; < mal condizionato / ben condizionato

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

- ERRORE ALGORITMICO: approssimazione f mediante un algoritmo per calcolarla; combinazione errori locali; differenti algoritmi producono differenti errori; < INSTABILE / STABILE

$$\varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

→ ERRORE TOTALE: misura la differenza relativa tra output atteso ed effettivo

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

TECNICHE PER ANALISI

~ ANALISI ERRORE INERENTE (Hp: continuità; derivabile due volte ⇒ buona positura; sviluppo Taylor)

$\varepsilon_{in} = C_x \varepsilon_x$ dove $C_x = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$ COEFFICIENTE di AMPLIFICAZIONE: misura condizionamento del problema < elevato ⇒ mal condiz. / modesto ⇒ ben condiz.

- per $f(x,y)$: $\varepsilon_{in} = \frac{1}{f(x,y)} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot x \cdot \varepsilon_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot y \cdot \varepsilon_y \right]$

⇓

per le operazioni aritmetiche si ha:

- $\boxed{f(x,y) = x+y}$, $\varepsilon_{in} \doteq C_x \varepsilon_x + C_y \varepsilon_y$, $C_x = x/(x+y)$, $C_y = y/(x+y)$
- $\boxed{f(x,y) = x-y}$, $\varepsilon_{in} \doteq C_x \varepsilon_x + C_y \varepsilon_y$, $C_x = x/(x-y)$, $C_y = -y/(x-y)$] fenomeno di cancellazione numerica

- $f(x,y) = x \cdot y$, $\varepsilon_{in} \doteq C_x \varepsilon_x + C_y \varepsilon_y$, $C_x = 1$, $C_y = 1$ } ben condizionato
- $f(x,y) = x/y$, $\varepsilon_{in} \doteq C_x \varepsilon_x + C_y \varepsilon_y$, $C_x = 1$, $C_y = -1$ } ben condizionato

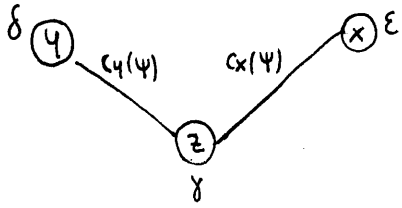
~ ANALISI ERRORE ALGORITMICO

TECNICA di ANALISI in AVANTI ~ mediante un grafo si rappresentano man mano i risultati intermedi riguardo gli errori generati dall'algoritmo

$\psi(\tilde{x},\tilde{y}) \doteq \psi(x,y)(1 + C_x(\psi)\varepsilon + C_y(\psi)\delta + \gamma)$ dove $\tilde{x} = x(1+\varepsilon)$, $\tilde{y} = y(1+\delta)$

generica funzione

↳ $\varepsilon_{TOT} = C_x(\psi)\varepsilon + C_y(\psi)\delta + \gamma$ il tutto può essere rappresentato come:



ERRORE FUNZIONE NON RAZIONALE $h(x)$

ERRORE ANALITICO : approssimazione della funzione $h(x)$ con una funzione rationale $f(x)$

$$\varepsilon_{an} = \frac{f(x) - h(x)}{h(x)}$$

↳ dal calcolo di $f(x)$ si generano gli errori visti in precedenza, quindi:

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - h(x)}{h(x)} \doteq \varepsilon_{an} + (\varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg})$$

⇓

OBIETTIVO: trovare $f(x)$ e $g(\tilde{x})$ che bilanciano gli errori



ALGEBRA LINEARE : CONDIZIONAMENTO

- CONDIZIONAMENTO: misurare la sensibilità del problema rispetto a perturbazioni dei dati in ingresso
  (Hp: valutare la distanza tra vettori e matrici per studiare la risoluzione di un sistema lineare)

└ NORMA VETTORIALE: funzione $f: \mathbb{F}^n \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \to \mathbb{R}$ tale che:

1) $\forall \underline{v} \in \mathbb{F}^n$, $f(\underline{v}) \geq 0$ ($f(\underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$);
2) $\forall \underline{v} \in \mathbb{F}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $f(\alpha \underline{v}) = |\alpha| f(\underline{v})$;
3) $\forall \underline{v}, \underline{z} \in \mathbb{F}^n$, $f(\underline{v}+\underline{z}) \leq f(\underline{v}) + f(\underline{z})$

e si indicherà con: $f(\underline{v}) = \|\underline{v}\|$

↳ induce una DISTANZA tra elementi di $\mathbb{F}^n$, tale che:

$d: \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$ / $\forall \underline{v}, \underline{z} \in \mathbb{F}^n$, $d(\underline{v}, \underline{z}) = \|\underline{v} - \underline{z}\|$

e gode di proprietà simili a quelle della norma:

1) $\forall \underline{v}, \underline{z} \in \mathbb{F}^n$, $d(\underline{v}, \underline{z}) \geq 0$ ($d(\underline{v}, \underline{z}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{z}$);
2) $\forall \underline{v}, \underline{z} \in \mathbb{F}^n$, $d(\underline{v}, \underline{z}) = d(\underline{z}, \underline{v})$;
3) $\forall \underline{v}, \underline{z}, \underline{w} \in \mathbb{F}^n$, $d(\underline{v}, \underline{z}) \leq d(\underline{v}, \underline{w}) + d(\underline{w}, \underline{z})$

⇓

si definiscono tre norme:

~ NORMA EUCLIDEA: $f(\underline{v}) = \|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$

~ NORMA 1: $f(\underline{v}) = \|\underline{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$

~ NORMA INFINITO: $f(\underline{v}) = \|\underline{v}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$

→ PRINCIPIO di EQUIVALENZA TOPOLOGICA delle NORME: i risultati dati dalle differenti norme sono qualitativamente uguali

└ NORMA MATRICIALE: funzione $f: \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ tale che:

1) $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $f(A) \geq 0$ ($f(A) = 0 \iff A = 0$);
2) $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $f(\alpha A) = |\alpha| f(A)$;
3) $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $f(A+B) \leq f(A) + f(B)$;
4) $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B)$

e si indicherà con $f(A) = \|A\|$

↳