Sommario

Richiami di algebra 2
Vettori 2
Matrici quadrate 2
Autovalori ed autovettori 4
Matrici simili 5
Richiami di analisi 7
Aritmetica di macchina 8
Operazioni in macchina 9
Sistemi lineari 15
Analisi dell'errore nella risoluzione di sistemi lineari 15
Norme vettoriali e matriciali 18
Soluzione di sistemi triangolari 20
Fattorizzazione LU di una matrice 21
Eliminazione Gaussiana 25
Eliminazione Gaussiana per la soluzione di sistemi lineari 28
Metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari 29
Metodo iterativo di Jacobi 35
Metodo iterativo di Gauss-Seidel 35
Autovalori ed autovettori 38
Metodo delle potenze 38
Metodo delle potenze inverse 42
Metodo delle potenze inverse con shift 42
Equazioni non lineari 43
Problemi nella risoluzione di equazioni non lineari: 43
Metodo di bisezione 44
Metodi iterativi funzionali 46
Metodo delle tangenti (Newton) 50
Interpolazione polinomiale 55
Forma di Lagrange 56
Integrazione (o quadratura) numerica 61
Lista teoremi 65
Lista definizioni 66

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

Richiami di algebra

Vettori

Notazione: i vettori si indicano per colonna.

Prodotto scalare siano $x, y \in R^n$

$$x^T y = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Proprietà del prodotto scalare:

- $x^T y = y^T x$
- $x^T(\alpha y) = \alpha x^T y \quad \forall \alpha \in R$
- $x^T(y + z) = x^T y + x^T z \quad \forall z \in R^n$
- $x^T x \geq 0$ e $x^T x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $(x^T y)^2 \leq (x^T x)(y^T y)$ detta disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Ortogonalità due vettori x, y si dicono ortogonali se $x^T y = 0$

Un insieme di vettori $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono ortonormali se $x_i^T x_j = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases} \quad \forall i, j \in \{1,2,..,n\}$

Una base ortonormale è sicuramente la base canonica formata dai vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$

Matrici quadrate

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$$

Diagonale principale formata da a_{ii} con $i \in \{1,2, \dots, n\}$

Matrici diagonali $a_{ij} = 0 \quad per\ i \neq j$; es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matrici scalari se diagonale e tutti gli elementi sulla diagonale sono reali

Matrice identità (I) se scalare con tutti 1 sulla diagonale principale.

Matrici triangolari superiori se $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$; es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice strettamente triangolare superiore se $a_{ij} = 0 \quad \forall i \geq j$; es:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrici triangolari inferiori se $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$; es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice strettamente triangolare inferiore se $a_{ij} = 0 \quad \forall i \leq j$; es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

Prodotto righe per colonne sia $C = A * B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \forall k \in \{1,2, \dots, n\}$$

Proprietà del prodotto righe per colonne:

- $(A * B) * C = A * (B * C)$
- $A * (B + C) = A * B + A * C$
- A*I=I*A=A

Ma in generale $A * B \neq B * A$

Matrice trasposta (A^T) matrice alla quale scambio le righe con le colonne. Es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Proprietà della matrice trasposta:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A * B)^T = A^T * B^T$

Matrice simmetrica se $A = A^T$

Matrice ortogonale se $A^T * A = A * A^T = I$ in pratica una matrice è ortonormale se le sue colonne formano una base ortonormale di R^n

Rango numero di righe l.i. =numero di colonne l.i. Quindi $rank(A) = rank(A^T)$

Determinante Sia A_{ij} la sottomatrice di A a cui è stata tolta la i-esima riga e la j-esima colonna

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & se\ n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) & se\ n > 1 \end{cases}$$

Se $n = 2$ cioè $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ allora $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Proprietà del determinante:

1) Se A è diagonale o triangolare $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
2) $\det(A^T) = \det(A)$
3) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Teorema di Binet)
4) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
5) $\det(B) = \alpha \det(A)$ se B è stata ottenuta moltiplicando per α una riga/colonna di A

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

6) $\det(B) = -\det(A)$ se B è stata ottenuta scambiando due righe/colonne di A
7) $\det(A) = 0$ se due o più righe/colonne sono linearmente dipendenti
8) $\det(B) = \det(A)$ se B è stata ottenuta da A con un passo di riduzione a scala

Matrice inversa A^{-1} si dice inversa di A se e solo se

$$A^T A = AA^T = I$$

Una matrice si dice singolare se non ammette inversa.

Proprietà della matrice inversa:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
4) Se A è simmetrica lo è anche A^{-1}
5) Se A è ortogonale allora $A^{-1} = A^T$
6) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Teorema di Rouché-Capelli

Sia $Ax = b$ un sistema lineare e sia $[A|b]$ la matrice ottenuta affiancando b ad A allora:

- Se $rank[A|b] > rank(A)$ il sistema lineare non ammette soluzioni
- Se $rank[A|b] = rank(A) = n$ il sistema ammette una ed una sola soluzione
- Se $rank[A|b] = rank(A) < n$ il sistema ammette infinite soluzioni

Autovalori ed autovettori

Sia $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, uno scalare λ si dice autovalore per A se esiste un vettore $x \in \mathcal{R}^n, x \neq 0$ detto autovettore tale che

$$Ax = \lambda x$$

L'insieme degli autovalori è detto spettro $spettro(A)$

L'autovalore di modulo massimo è detto raggio spettrale di A e si indica con $\rho(A)$

Gli autovalori si calcolano imponendo che $\det(A - \lambda I) = 0$, questo determinante è un polinomio di grado n in λ detto polinomio caratteristico $p(\lambda)$ che, per il teorema fondamentale dell'algebra ammette n radici in $\mathcal{C}$, le sue radici sono proprio gli autovalori.

Se $\lambda \in \mathcal{C}$ è autovalore di A ma $\lambda \notin \mathcal{R}$ allora anche λ^* è autovalore di A.

Una volta trovati gli autovalori lo sostituisco uno per volta nell'equazione $(A - \lambda I)x = 0$ e risolvendo rispetto ad x calcolo gli autovettori.

L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore genera l'autospazio corrispondente a quell'autovalore.

Molteplicità algebrica di un autovalore $m_a(\lambda)$ indica quante volte λ si ripete come autovalore di A.

Molteplicità geometrica $m_g(\lambda)$ è la dimensione dell'autospazio relativo ad un autovalore.

In generale vale che

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

Traccia di una matrice somma di tutti gli elementi sulla diagonale principale

$$traccia(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Teorema

$$traccia(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Teorema

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Teorema

A è singolare $\Leftrightarrow$ A non è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow 0 \in spettro(A)$

Proprietà di autovalori ed autovettori:

Siano λ, x rispettivamente autovalore ed autovettore di A allora:

1) Se A è diagonale o triangolare gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale
2) $spettro(A) = spettro(A^T)$
3) $A^k x = \lambda^k x \quad \forall k \in \mathcal{N}$
4) $\frac{1}{\lambda}$ è autovalore di A^{-1}

Matrici simili

Se in $\mathcal{R}^n$ considero due matrici associate alla stessa applicazione lineare ma con due basi diverse ottengo due matrici diverse $A, B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ tali che

$$\exists P \in \mathcal{R}^{n \times n}: \quad A = PBP^{-1}$$

P è detta matrice cambiamento di base ed A e B si dicono matrici simili.

Proprietà delle matrici simili:

1) Hanno uguali autovalori
2) Hanno uguale determinante
3) Hanno uguale traccia
4) Hanno uguale rango

Una matrice si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale D.

Teorema

A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A ha n autovettori linearmente indipendenti

Tali autovettori costituiscono le colonne della matrice P.

Teorema $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ è diagonalizzabile se:

- Il numero degli autovalori, contati con la loro molteplicità, sia pari ad n
- Per ogni autovalore la molteplicità algebrica deve coincidere con la molteplicità geometrica

Una matrice si dice simmetrica se e solo se $A = A^T$ cioè se $a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j \in \{1,2,\dots,n\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 333 9937745