CONDIZIONE NECESSARIA (CN)

Presupposto (ipotesi) per il quale una affermazione o proprietà (tesi) potrebbe sussistere, ma senza il quale l'affermazione non può valere.

Es.:

Supponiamo di dover preparare un risotto (tesi); per farlo ci occorre una serie di ingredienti: acqua, fuoco, pentola, sale, riso (ipotesi). Ognuno di questi ingredienti è una CN affinché venga fuori il risotto (ma non è sufficiente se non sappiamo prepararlo) ed infatti se mancasse anche solo uno degli ingredienti non può venir fuori alcun risotto.

CONDIZIONE SUFFICIENTE (CS)

Presupposto (ipotesi) per il quale una affermazione (tesi) sussiste, ma senza il quale l'affermazione potrebbe comunque sussistere.

Es.:

Supponiamo di imbatterci in un ladro (ipotesi); tale condizione è sufficiente per convenire che questo sia un fuorilegge (tesi). Infatti se tale ipotesi venisse meno non si potrebbe convenire che questo non sia un fuorilegge (infatti potrebbe essere un assassino, stupratore o altro).

CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE (CNS)

Il presupposto (ipotesi) è la stessa identica cosa rispetto all'affermazione (tesi).

Es.:

Supponiamo una logica duale e che il mondo sia esclusivamente senza sfumature, o bianco o nero. In tal caso "bianco" $\Longleftrightarrow$ "non nero" e "non bianco" $\Longleftrightarrow$ "nero".

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

OBIETTIVI DEL CALCOLO NUMERICO

Supponiamo di porci nelle condizioni di voler affrontare un problema reale, dotato di una certa complessità a causa di variabilità, grandezze di influenza e quant'altro: il primo approccio può essere quello di analizzare queste variabili e costruire un modello matematico. Purtroppo, però, tali modelli possiedono complessità a loro volta molto alte; si immaginini infatti dover risolvere complesse equazioni differenziali che modellizzano con altissima precisione un fenomeno. Tale modello si appoggia ad una matematica differenziale che tratta oggetti del campo $\mathbb{R}^n$, ovvero numeri reali o meglio vettori di componenti reali (essendo più "estesi" si può anche parlare di $\mathbb{R}^n$ come spazio di lavoro) le cui caratteristiche di maggior problema è il numero infinito di cifre che, a volte, un numero reale possiede.

Tale modello è dunque inutile ai nostri scopi? Affrontare un problema fisico vuol dire prevedere anche caratteristiche del fenomeno che possono essere fornite da strumenti di analisi matematica del modello; tramite concetti di fondamentale importanza come i limiti, le serie, derivate e integrali, serie di Taylor si possono desumere proprietà come convergenza, grado di linearità di specifiche variabili, regolarità ed altro.

Tuttavia può risultare ovviamente molto difficile calcolare con precisione la soluzione di queste equazioni che caratterizzano il modello; ci vengono incontro metodi più semplici di risoluzione che sfociano nella branca dell'analisi numerica detta anche calcolo numerico. Il passaggio che ci fa preferire questo metodo di analisi rispetto ad un altro è un passaggio importante quanto delicato: l'approssimazione. Infatti i numeri fino meglio gli oggetti trattati nel modello sono appartenenti al campo $\mathbb{C}^n$ (dei complessi vettoriali).

Questo implica che potrebbe non esistere una rappresentazione finita di un numero (tale numero reale cade in un sottoinsieme detto irrazionale).
Perché questo problema mi deve interessare così tanto?
L'ultimo punto del nostro approccio ad un problema fisico è l'implementazione in macchina di un algoritmo che produca cifre e risolva il modello approssimato fornendoci una soluzione quantitativa (e non qualitativa come fa l'analisi matematica molto spesso). In quest'ottica i numeri reali, soprattutto quelli irrazionali, sono detti non calcolabili in quanto non esiste algoritmo che, poiché sono numeri con infinite cifre, può generare questi oggetti.

Approssimazione ⟶ errori

Il passaggio da oggetti reali a oggetti, che chiameremo in virgola mobile o floating point $\mathbb{F}$, genera un errore non nullo:

•sia $x \in \mathbb{R}$ e $\tilde{x} \in \mathbb{F}$, tali che $x > 0$; allora

$$\varepsilon = |\tilde{x} - x|$$

è detto errore di rappresentazione assoluto e

$$\varepsilon_x = \frac{|\tilde{x} - x|}{x}$$

è noto come errore di rappresentazione relativo.

$\tilde{x}$ è detto numero di macchina e introduce ad un'aritmetica detta finita

Un esempio di questo errore è quindi:

$x = \sqrt{2}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{3}$

$\tilde{x} = 1.41421356$ $\qquad$ $\tilde{x} = 0.33333333$

$|\tilde{x} - x| = +3.7309 \cdot 10^{-10}$ $\qquad$ $|\tilde{x} - x| = 3.33 \cdot 10^{-13}$

Si noti che tali errori sono molto piccoli ma non per questo trascurabili;

MASTER COPY Tel. 050 834226 Cell. 388 9937745

difatti potrebbero accumularsi in un algoritmo diventando non più trascurabili. Inoltre le operazioni aritmetiche commettono un errore non nullo detto errore algoritmico che dipende in generale dall'operazione che si compie.

- siano $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{F}$ due numeri di macchina che approssimano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora:

$$x + y = \tilde{x} \oplus \tilde{y} = (\tilde{x} + \tilde{y})(1 + \varepsilon) \quad \text{con } |\varepsilon| < u \text{ (precisione di macchina)}$$

ed ε è detto errore locale dell'operazione.

L'errore algoritmico e l'errore locale non sono da confondere: il primo valuta la bontà di una serie di procedimenti $\psi(\tilde{x})$ che calcolano la funzione $f(\tilde{x})$. Infatti:

- dato $\tilde{x} \in \mathbb{F}$, la funzione $f(\tilde{x})$ che opera su tale oggetto e $\psi(\tilde{x})$ che approssima $f(\tilde{x})$, si dice

$$\varepsilon_{alg} = \frac{\psi(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

l'errore algoritmico.

In realtà esistono proprietà che approfondiremo che quantificano la bontà di un algoritmo in maniera molto più immediata degli ε_{alg}.

Prima di addentrarci in queste problematiche, definiamo l'ambiente di lavoro, dunque gli oggetti e le loro proprietà che maneggeremo d'ora in avanti.

Rappresentazione in base di un numero

Sia $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, allora $\exists!\, p \in \mathbb{Z}$ e la successione $\{d_i\}_{i=1,2,\dots}$ di numeri interi, $0 \leq d_i < \beta$, $d_1 \neq 0$, non definitivamente uguali a $\beta - 1$ (ovvero non deve accadere che da un certo punto in poi le cifre della successione siano pari a $\beta - 1$) tali che

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9637745