RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ $\exists!$ $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ sequenza infinita di cifre per cui $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_i \leq B-1$, di non definitivamente uguale a $B-1$ tali che $x = sgn(x) \cdot B^p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot B^{-i}$ p = esponente

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI DI MACCHINA

Siano t, m, M interi con $t \geq 1$, $m, M > 0$ e $F(B,t,m,M) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = sgn(x) \cdot B^p \cdot \sum_{i=1}^{t} d_i \cdot B^{-i} \right\} \cup \{0\}$

con $0 \leq d_i \leq B-1$, $d_1 \neq 0$, $-m \leq p \leq M$.

$\omega = B^{-(m+1)}$, $\Omega = B^M (B-1) \cdot \sum_{i=1}^{t} B^{-i}$.

ERRORE ASSOLUTO: $\tilde{x} - x$ ERRORE DI RAPPRESENTAZIONE: $\epsilon_x = \frac{\tilde{x}-x}{x} \rightarrow \tilde{x} = x(1+\epsilon_x)$

TEOREMA Se $x \neq 0$ allora $|\epsilon_x| \leq B^{1-t} = u$

$$|\epsilon_x| = \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| = \frac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leq \frac{B^p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot B^{-i} - B^p \cdot \sum_{i=1}^{t} d_i \cdot B^{-i}}{B^p \cdot B^{-1}} = \frac{\sum_{i=t+1}^{\infty} d_i \cdot B^{-i}}{B^{-1}} < \frac{(B-1) \cdot B^{-(t+1)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} B^{-i}}{B^{-1}} =$$

$$= \frac{(B-1) B^{-(t+1)} \cdot B/(B-1)}{B^{-1}} = (B-1) B^{-(t+1)} \frac{B^2}{B-1} = B^{1-t}.$$

ERRORE INERENTE: $\epsilon_{IN} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$ ERRORE ALGORITMICO: $\epsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$

TEOREMA Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ razionale, allora $\epsilon_{TOT} \doteq \epsilon_{in} + \epsilon_{alg}$

$$\epsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(x)} \cdot \frac{f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} + \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \epsilon_{alg} \cdot \frac{f(\tilde{x})}{f(x)} + \epsilon_{IN}$$

$$= \epsilon_{alg} (\epsilon_{in} + 1) + \epsilon_{IN} = \epsilon_{alg} + \epsilon_{in}.$$

ERRORE TOTALE: $\epsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$

$\epsilon_{IN} \doteq \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$ — in 2 variabili — $\epsilon_{IN} = \frac{1}{f(x,y)} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x \epsilon_x + \frac{\partial f}{\partial y} y \epsilon_y \right]$.

ALGORITMO DI RUFFINI-HORNER: $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 = p_0 + x\left[p_1 + x\left[p_2 + p_3 x\right]\right]$

$y = p(n)$ for $k = n-1 : 1$ $y = y \cdot x + p(k-1)$; end.

TEOREMA DI GERSCHGORING Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e siano $K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1..n \right\}$.

e $H_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}| \quad i = 1..n \right\}$.

allora λ autovalore di $A \rightarrow \lambda \in [\cup K_i] \cap [\cup H_i]$.

$A \cdot x = \lambda \cdot x$ con x autovettore $\neq 0$. In componenti $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = \lambda \cdot x_i$ $i = 1..n$.

ovvero $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i$ $i = 1..n$.

sia $|x_p| = \max |x_i|$ dunque $|x_p| \geq |x_i|$ $i = 1..n$.

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j \right| = \left| (\lambda - a_{pp}) x_p \right| = |\lambda - a_{pp}| |x_p| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \cdot |x_j|$$

Dunque $|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \cdot \frac{|x_j|}{|x_p|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}|$. Allora $\lambda \in K_p$.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

NORME VETTORIALI

$\|x\|_2 = \sqrt{x^T \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\quad \|x\|_\infty = \max_{i=1\cdots n} |x_i|$ $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

NORME MATRICIALI INDOTTE

$\|A\| = \max \|A \cdot x\|$ con $\|x\| = 1$ e $\|A \cdot x\| = \|A \cdot x\| \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|} = \|x\| \cdot \left\| A \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|x\| \cdot \|A\|$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)}$ $\quad \|A\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ $\quad \|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

NUMERO DI CONDIZIONAMENTO

$K_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$ $\quad \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1} \cdot \tilde{b} - A^{-1} b\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|x\|}$

Poiché $\|A \cdot x\| = \|b\| \leq \|A\| \|x\|$ allora $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$ dunque $\|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$

BACK SUBSTITUTION $\quad x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left[b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} \cdot x_j \right]$

FATTORIZZAZIONE LU: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si dice fattorizzabile in forma LU se $\exists$ una matrice L triangolare inferiore con $L(i,i) = 1$ e una matrice U triangolare superiore tale che $A = L \cdot U$.

TEOREMA - ESISTENZA E UNICITÀ DELLA FATTORIZZAZIONE: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se $\det [A(1:k), A(1:k)] \neq 0$ con $k = 1 : n-1$ allora $\exists!$ fattorizzazione LU di A.

Per induzione
- $n = 1$ $A = [a]$ l'ipotesi è vuota dunque $\exists!$ LU.
- se è vero per $n-1$, verifichiamo per n.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A(1:n-1)\,1:n-1) & z \\ \hline w^T & a_{nn} \end{array}\right] \quad L = \left[\begin{array}{c|c} L(1:n-1, 1:n-1) & 0 \\ \hline y^T & 1 \end{array}\right] \quad U = \left[\begin{array}{c|c} U(1:n-1,\ 1:n-1) & q \\ \hline 0^T & u_{nn} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} A(1:n-1, 1:n-1) = L(1:n-1, 1:n-1) \cdot U(1:n-1, 1:n-1) \\ L(1:n-1, 1:n-1)\, q = z \\ y^T \cdot U(1:n-1, 1:n-1) = w^T \\ y^T \cdot q + u_{nn} = a_{nn} \end{cases}$$

La fattorizzazione di $A(1:n-1, 1:n-1)$ $\exists!$ per Hp induttiva e per Hp del teorema; $A(1:n-1, 1:n-1)$ è invertibile per Hp del teorema e $L(1:n-1, 1:n-1)$ è invertibile poiché triangolare con 1 in diagonale. $U(1:n-1, 1:n-1)$ è invertibile per Binet. Allora q, y^T, u_{nn}, a_{nn} sono univocamente determinati.

Se abbiamo una sottomatrice principale di testa singolare e altre invertibili allora A non ammette LU.

MATRICE ELEMENTARE DI GAUSS = triangolare inferiore con 1 in diagonale e $n-1$ colonne tutte nulle.

$E = I + v \cdot e_k^T$ $\quad v_1 = v_2 = \ldots = v_k = 0$, e_k = vettore della base canonica con 1 in posizione K.

- è invertibile
- $E^{-1} = I - v \cdot e_k^T$
- $(I + v e_k^T)(I + w e_k^T) = I + v e_k^T + w e_k^T$.

TEOREMA: Sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $x_1 \neq 0$, allora $\exists$ matrice elementare di Gauss tale che $E \cdot x = [x_1\ 0 \cdots 0]^T$.

$$E \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{x_2}{x_1} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \\ -\frac{x_n}{x_1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Master Copy COPISTERIA 050/832126 388/9937745

ELIMINAZIONE GAUSSIANA Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\det[A(1:k,1:k)] \neq 0 \quad k = 1 \dots n-1$

$E_1 \cdot A^{(0)} = A^{(1)} \qquad a_{kj}^{(1)} = a_{kj}^{(0)} - \frac{a_{k1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)} \qquad$ costo: $O(n^3)$.

PIVOTING PARZIALE

$|a_{rk}|^{(k)} = \max |a_{ik}|^{(k)} \qquad k \le i \le n$

METODI ITERATIVI

$\lim_{k\to+\infty} v_k = v \in \mathbb{R}^n \iff \lim_{k\to+\infty} \|v_k - v\| = 0 \qquad A = M - N \qquad Ax = b \Rightarrow Mx = Nx + b$

$M x_{k+1} = N \cdot x_k + b \quad , \quad P = M^{-1} \cdot N \ e \ q = M^{-1} \cdot b$

TEOREMA Se $\lim_{k\to+\infty} x_k = v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = Pv + q$ equivale a $A \cdot v = b$

$\lim_{k\to+\infty} x_k = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} P \cdot x_k + q = P \cdot v + q = v$

TEOREMA Un metodo iterativo $x_{k+1} = Px_k + q$ si dice convergente se le successioni generate convergono per qualunque punto iniziale.

TEOREMA- CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA CONVERGENZA

Se esiste una norma matriciale indotta tale che $\|P\| < 1$ allora il metodo è convergente.

$x_{k+1} = P x_k + q \ , \ v = Pv + q \rightarrow x_{k+1} - v = P(x_k - v) \rightarrow e_{k+1} = P \cdot e_k = P^2 \cdot e_{k-1} = P^{k+1} \cdot e_0$

$\|e_{k+1}\| = \|P^{k+1} \cdot e_0\| \le \|P^{k+1}\| \, \|e_0\| \le \|P\|^{k+1} \cdot \|e_0\|$

Dunque $0 \le \|e_{k+1}\| \le \|P\|^{k+1} \cdot \|e_0\|$ se $k \to +\infty$ allora $\|e_{k+1}\| \to 0$ dunque $x_{k+1} \to v, \ \forall x_0$

TEOREMA- CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA CONVERGENZA

Il metodo iterativo è convergente se e solo se $\varphi(P) < 1$.

$e_{k+1} = P^{k+1} \cdot e_0 \qquad \varphi(P) = |\lambda| \rightarrow P \cdot v = \lambda v$ con v autovettore.

ha e_0 l'autovettore v relativo all'autovalore λ.

$e_{k+1} = P^{k+1} v = \lambda^{k+1} \cdot v \rightarrow \|e_{k+1}\| = \|\lambda^{k+1} \cdot v\| = |\lambda|^{k+1} \cdot \|v\|$

Il metodo può convergere se $\|e_{k+1}\| \to 0$ dunque $|\lambda| < 1 \Rightarrow \varphi(P) < 1$.

METODO DI JACOBI

$M = \text{diag}(A) \qquad N = M - A \qquad x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left[b_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ji} \cdot x(i)^k \right] \qquad O(n^2)$

METODO DI GAUSS-SEIDEL

$M = \text{tri_inf}(A) \qquad N = M - A \qquad x_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left[b_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ji} \cdot x(i)^{k+1} \right] \qquad O(n^2)$

Condizione di applicabilità = $a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \dots n$

MATRICE PREDOMINANTE DIAGONALE $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1 \dots n$

TEOREMA - Se A è predominante diagonale allora è invertibile

Per assurdo supponiamo non sia invertibile $\rightarrow 0 \in K_i \rightarrow K_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |0 - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}$

ma questa è l'esatta negazione di predominanza diagonale

TEOREMA - Se A è predominante diagonale allora Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili perché A è invertibile dunque $a_{ii} \neq 0$.

TEOREMA – Se A è predominante diagonale e $|\lambda| \geq 1$ allora $B = \lambda M - N$ è predominante diagonale

Per Hp $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1 \dots n$ e $|\lambda| \geq 1$.

Dobbiamo dim. che $|\lambda a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$ perché $B = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \dots a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

Se $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow |\lambda a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |\lambda a_{ij}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$

perché $|\lambda| \geq 1$

Dunque B è pred diagonale

TEOREMA – Se A è predominante diagonale allora Jacobi e Gauss-Seidel convergono

Mi occorre $\varphi(P) < 1$. Cerchiamo gli autovalori di $P \to \det(\lambda I - P) = 0 \quad P = M^{-1} N$ e $I = M^{-1} M$

$\det(\lambda M^{-1} M - M^{-1} N) = \det(M^{-1}) \cdot \det(\lambda M - N) = 0$ poiché M^{-1} è invertibile ha $\det \neq 0$

Dunque stiamo cercando i λ che rendono $B = \lambda M - N$ singolare.

Se A è predominante diagonale e $|\lambda| \geq 1$ allora B è pred diagonale e invertibile.

Affinché B sia singolare occorre $|\lambda| < 1 \Rightarrow \varphi(P) < 1 \Rightarrow$ convergono.

PROBLEMI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO = non ci sono efficienti algoritmi per calcolare i coefficienti gli zeri sono mal condizionati rispetto ai coefficienti.

METODO DELLE POTENZE

Hp $\begin{cases} A \text{ diagonalizzabile} \to A \to S^{-1} \cdot A \cdot S = D \text{ diagonale e le colonne di } S^{-1} \text{ sono } v_1 \dots v_n. \\ |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \text{ e gli autovettori sono una base ortonormale di } \mathbb{C}^n. \end{cases}$

$t^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)} \quad (\alpha_1 \neq 0) \to \begin{cases} u^{(k+1)} = A \cdot t^{(k)} \\ t^{(k+1)} = \dfrac{u^{(k+1)}}{\beta_k} \end{cases}$

$t^{(k)} = \dfrac{A^k \cdot t^{(0)}}{\beta_k \cdots \beta_1} = \dfrac{A^k \cdot t^{(0)}}{\gamma_k} = \dfrac{1}{\gamma_k} \left[\alpha_1 (\lambda_1)^k v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j (\lambda_j)^k v^{(j)} \right]$ con λ_1 = autovalore dominante, v_1 = autovettore relativo a λ_1

TEOREMA $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{\gamma_k \cdot t^{(k)}}{(\lambda_1)^k} = \alpha_1 v^{(1)}.$

$\dfrac{\gamma_k \cdot t^{(k)}}{(\lambda_1)^k} = \alpha_1 v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k \cdot v^{(j)} \to \alpha_1 v^{(1)} + 0 = \alpha_1 v^{(1)}$

TEOREMA $v_j^{(1)} \neq 0 \quad \lim_{k \to +\infty} \dfrac{u_j^{(k+1)}}{t_j^{(k+1)}} = \lambda_1$

Se $v_j^{(1)} \neq 0$ allora $t_j^{(k)} \neq 0$, $\dfrac{u_j^{(k+1)}}{t_j^{(k+1)}} = \dfrac{\gamma_k \cdot u_j^{(k+1)} / (\lambda_1)^k}{\gamma_k \cdot t_j^{(k+1)} / (\lambda_1)^k} = \dfrac{\dfrac{\gamma_k}{(\lambda_1)^k} \cdot A \cdot t_j^{(k)}}{\dfrac{\gamma_k}{(\lambda_1)^k} \cdot t_j^{(k+1)}} \to \dfrac{\alpha_1 A v_1}{\alpha_1 v_1} = \dfrac{\alpha_1 \lambda_1 v_1}{\alpha_1 v_1}$

TEOREMA $v_j^{(1)} \neq 0 \quad \lim_{k \to +\infty} \dfrac{t_i^{(k)}}{t_j^{(k)}} = \dfrac{v_i^{(1)}}{v_j^{(1)}}$

$\dfrac{t_i^{(k)}}{t_j^{(k)}} = \dfrac{\dfrac{\gamma_k t_i^{(k)}}{(\lambda_1)^k}}{\dfrac{\gamma_k \cdot t_j^{(k)}}{(\lambda_1)^k}} \to \dfrac{\alpha_1 v_i^{(1)}}{\alpha_1 v_j^{(1)}} = \dfrac{v_i^{(1)}}{v_j^{(1)}}$

QUOZIENTE DI RAYLEIGH $r_v = \dfrac{v^* \cdot A \cdot v}{v^* \cdot v} \quad v \neq 0$

$r_v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

TEOREMA $r(t^{(k)}) = \lambda_1$

$r(t^{(k)}) = \dfrac{t^{(k)*} \cdot A \cdot t^{(k)}}{t^{(k)*} \cdot t^{(k)}} = \dfrac{\dfrac{\overline{\gamma_k} \cdot t^{(k)*}}{(\overline{\lambda_1})^k} \cdot A \cdot \dfrac{\gamma_k \cdot t^{(k)}}{(\lambda_1)^k}}{\dfrac{\overline{\gamma_k} \cdot t^{(k)*}}{(\overline{\lambda_1})^k} \cdot \dfrac{\gamma_k \cdot t^{(k)}}{(\lambda_1)^k}} \to \dfrac{\overline{\alpha_1} v_1^* \cdot A \cdot \alpha_1 v_1}{\overline{\alpha_1} v_1^* \cdot \alpha_1 v_1} = \dfrac{|\alpha_1|^2}{|\alpha_1|^2} \cdot \dfrac{v_1^* \cdot \lambda_1 v_1}{v_1^* \cdot v_1} = \lambda_1$

Yuki Corsi CORSI 050/8312126 388/9837745

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\| A\cdot t^{(k)} - \lambda_1 \cdot t^{(k)} \|}{\| t^{(k)} \|} = 0$$

METODO DELLE POTENZE INVERSE

$Av = \lambda v \qquad v = \lambda \cdot A^{-1} v \rightarrow A^{-1}\cdot v = \frac{1}{\lambda}\cdot v$ Max autovalore di A = Min autovalore di A^{-1}

$$\begin{cases} u^{(k+1)} = A^{-1}\cdot t^{(k)} \\ t^{(k+1)} = \dfrac{u^{(k+1)}}{\beta_k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A\cdot u^{(k+1)} = t^{(k)} \\ t^{(k+1)} = \dfrac{u^{(k+1)}}{\beta_k} \end{cases}$$

MATRICE STOCASTICA: $\begin{cases} a_{ij} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad i = 1..n \end{cases}$

PROBLEMI Equazioni non lineari = esistenza e localizzazione delle soluzioni reali
i metodi sono tutti iterativi
i metodi convergono localmente per opportune scelte del punto iniziale

METODO DI BISEZIONE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, $f(a)\cdot f(b) < 0$. Per il teorema degli zeri $\exists\, \eta \in [a,b] \mid f(\eta)=0$.

$a_0 = a,\ b_0 = b;$ for $k = 1,2..$

$m_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2};$

if $[f(a_{k-1})\cdot f(m_k)] < 0$

$b_k = m_k;$

else

$a_k = m_k$

PROPRIETÀ

$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$

a_k monotona crescente limitata da $a_0 \Rightarrow a_k \to l_a$
b_k " decrescente " " $b_0 \Rightarrow b_k \to l_b$

$|b_k - a_k| \to 0 \Rightarrow l_a = l_b$

$f(a_k)\cdot f(b_k) \leq 0 \Rightarrow f^2(l) = 0 \quad l=0 \quad l=x.$

NUMERO DI PASSI $\rightarrow \frac{b_0 - a_0}{2^k} < \epsilon \qquad k > \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)$

$f(x) = 0 \qquad x = g(x);$

TEOREMA Se $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\lim_{k\to+\infty} x_k = l$ allora $l = g(l);$

$x_{k+1} = g(x_k) \qquad \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} g(x_k) \Leftrightarrow l = g(l).$

TEOREMA DEL PUNTO FISSO sia $g:[a,b]\to\mathbb{R},\ g\in C^1[a,b],\ g(\alpha)=\alpha,\ \alpha\in[a,b]$

se $\exists\, \rho>0 \mid \forall x \in I_\alpha = [\alpha-\rho, \alpha+\rho] \subset [a,b]$ tc $|g'(x)| < 1 \Rightarrow \forall x_0 \in I_\alpha,\ x_k \in I_\alpha \wedge x_k \to \alpha$

ma $\lambda = \max_{x\in I_\alpha} |g'(x)|$ Dimostriamo che $|x_k - \alpha| \leq \lambda^k \cdot \rho$

- $k=0 \quad |x_0 - \alpha| \leq \rho$ vero per ipotesi
- $k \to k+1 \quad |x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| = |g'(\xi)|\,|x_k - \alpha|$ per Lagrange, $\xi \in (x_k, \alpha) \subset I_\alpha.$

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g'(\xi)|\,|x_k - \alpha| \leq \lambda\cdot\lambda^k\cdot\rho = \lambda^{k+1}\cdot\rho.$$

- NON ESISTONO ALTRI PUNTI FISSI $\beta = g(\beta)$ altrimenti $|\alpha-\beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\xi)|\,|\alpha-\beta| < |\alpha-\beta|.$
- I_α DEVE ESSERE CENTRATO IN α.

METODO LOCALMENTE CONVERGENTE sia $g\ [a,b]\to\mathbb{R},\ g(\alpha)=\alpha,\ \alpha\in[a,b]$

Il metodo iterativo è localmente convergente se $\exists\, \rho>0$ tale che $\forall\, x_0 \in I_\alpha = [\alpha-\rho, \alpha+\rho] \subset [a,b]$ tale che $x_k \in I_\alpha$ e $x_k \to \alpha$.

master copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745