CALCOLO NUMERICO:

SCOPO DEL CORSO: RISOLUZIONE DI PROBLEMI MATEMATICI CON METODI NUMERICI

PERCHÉ SI APPLICA?

1- SI APPLICA IN TUTTE LE SITUAZIONI IN CUI NON SI HA UNA SOLUZIONE IN "FORMA CHIUSA" → ATTRAVERSO OPPORTUNE IPOTESI SI POSSONO GENERARE SEQUENZE DI APPROSSIMAZIONI $\{x_k\} \to x$ (CONVERGONO ALLA SOLUZIONE DEL SIST.)

2- I PROBLEMI COINVOLGONO DATI NUMEROSI → SI BASA AD ES. SULL'ALGORITMO DI PAGE-RANKING, CHE SI BASA SULL'AUTOVALORE DOMINANTE DI UNA MATRICE CHE HA MILIARDI DI RISOLUZIONI.

3- É LEGATO ALLA SPERIMENTAZIONE → SERVE PER CAPIRE LE PROP. QUALITATIVE E QUANTITATIVE PER RICAVARE LA SOLUZIONE.

N.B: MAI SCRIVERE: A/x o x/A o $x = b \cdot A^{-1}$!! NON SONO SCRITTURE POSSIBILI!!!

I PROBLEMI CHE CI INTERESSANO:

- SOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI
- CALCOLO DI AUTOVALORI
- METODI ITERATIVI FUNZIONALI.

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI E L'ARITMETICA DI MACCHINA:

SI UTILIZZA UNA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEL TIPO ($B=10$):

ES: $1{,}34 = \underline{1} \cdot 10^0 + \underline{3} \cdot 10^{-1} + \underline{4} \cdot 10^{-2}$ $\quad 1,3,4$ = CIFRE DELLA RAPPRESENTAZIONE $= \{d_i\}$

SE VALUTO I NUMERI DECIMALI ALLORA $0 \le d_i \le 9$

PER UNA BASE GENERICA:

SIA $B \in \mathbb{N}$, $B > 1$ LE CIFRE RAPPRESENTABILI SONO:

$$0 \le d_i \le B-1$$

d_i NON DEFINITIVAMENTE UGUALI A $B-1$ IN QUANTO SENNÓ SI HA UN

PROBLEMA DI UNICITÁ:

1° ES: $(0,01)_{10} = 10^{-1}(0,1)_{10}$ → L'ESPONENTE 10^{-1} PERMETTE DI SPOSTARE LA VIRGOLA A DX DI 1 POSTO → $d_1 \neq 0$!!! NECESSARIAMENTE!

2° ES:

$(0,\overline{9})_{10} = (0, 9 \ldots 9)_{10} = (0,\overline{9})_{10} \cong 1$

$(0,1 \ldots 1)_2 = (0,\overline{1})_2 \cong 1$

ESSENDO $B=2$ $\{0,1\}$

$B=10$ $\{0 \ldots 9\}$ IN ENTRAMBI I CASI NO CHE $d_1 = B-1$!

SI VERIFICA INFATTI CHE POTREI AVERE 2 RAPPRESENTAZIONI DEL NUMERO 1! CIÓ NON É POSSIBILE PERCHÉ LA RAPPRESENTAZIONE DI CIASCUN NUMERO DEVE ESSERE UNICA! PERCIÓ LE CIFRE d_1 NON POSSONO ESSERE DEFINITIVAMENTE UGUALI A $B-1$!

INOLTRE CONSIDERO $B>1$ PERCHÉ:

SE AVESSI PRESO $B=1$ → NO SOLO LA CIFRA 0, IN QUANTO $0 \leq d_i \leq B-1$

$0 \leq d_i \leq 1-1 = 0$ → $0 \leq d_i \leq 0$ → $d_i = \{0\}$ → LE CIFRE SARANNO SOLO SEQUENZE DI ZERI! CIÓ NON HA SENSO AI FINI DELLA RAPPRESENTAZIONE, PERCHÉ AVREI:

→ $0 \cdot (B-1)^0 + 0 \cdot 1^{-1} + 0 \cdot 1^{-2} + \ldots + 0 \cdot 1^{-10} = 0$!!

N.B: DESCRIVO I NUMERI REALI IN QUANTO POSSO VEDERE I COMPLESSI COME: "$z = a + ib$" → PUÓ ESSERE DESCRITTO CIASCUN NUMERO COMPLESSO CON UNA COPPIA DI NUMERI REALI!!

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI IN BASE B:

SIA $B \in \mathbb{N}$, $B>1$ UNA BASE DI NUMERAZIONE

SIA $X \in \mathbb{R}$, $X \neq 0$

ALLORA $\exists!$ UN ESPONENTE $p \in \mathbb{Z}$ E UNA SUCCESSIONE DI CIFRE $\{d_i\}_{i \geq 1}$ CHE HA: $d_1 \neq 0$ E d_i NON DEFINITIVAMENTE UGUALI A $B-1$

SI HANNO TALI CARATTERISTICHE PER DEFINIRE:

$X = \text{segn}(X) \cdot B^p \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} d_i \cdot B^{-i}$ → RAPPRESENTAZIONE NORMALIZZATA IN VIRGOLA MOBILE

CON: 1- $\text{segn}(x) = \begin{cases} +1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

2- $\sum_{i=1}^{+\infty} d_i \cdot B^{-i}$ → MANTISSA

N.B: SE $\exists K$ T.C: $d_K \neq 0$ E $d_i = 0$ CON $i > K$ ALLORA: LA RAPPRESENTAZIONE IN BASE B SI DICE CHE É "FINITA DI LUNGHEZZA K"

3- RAPPRESENTAZIONE NORMALIZZATA → $d_1 \neq 0$!!

4- $X \neq 0$ → CONDIZIONE NECESSARIA PER AVERE UNA RAPPRES. NORMALIZZATA"

N.B: PROBLEMA DI UNICITÁ:

COME VISTO PRIMA NO CHE:

$(0,1\ldots1)_2 = (0,\bar{1})_2$

$(0,9\ldots9)_{10} = (0,\bar{9})_{10}$

→ SONO RAPPRESENTAZIONI NON AMMESSE PERCHÉ SI RIFERISCONO AD UNO STESSO NUMERO ED INOLTRE SI HA $B-1 = d_1$!!

SI VERIFICA CIÓ:

POSSO SCRIVERE I NUMERI PERIODICI SOTTO FORMA DI FRAZIONI:

$$(0,\bar{9})_{10} = \sum_{i=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} 10^{-i} = 9 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i}_{\text{SERIE GEOMETRICA}}$$

LA RISOLUZIONE DI QUESTA SERIE É BASATA SULLA VALUTAZIONE DEL LIMITE DELLA SERIE, PER VEDERLA COME LIMITE DELLE SOMME PARZIALI:

DI REGIONE $a = \frac{1}{10}$!

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \lim_{K\to\infty} \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{10}\right)^i$$

→ AL VARIARE DI K LA SERIE POTEVA:

- SE $a \geq 1$ → DIVERGEVA
- SE $0 < a < 1$ → CONVERGEVA

VALUTO IL CASO DELLA CONVERGENZA:

$$\sum_{K=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^K = \sum_{K=1}^{+\infty} a^K = a + \ldots + a^K = (1-a)(a^2 + \ldots + a^K) =$$

$$= (a^2 + \ldots + a^K)(a^2 + \ldots + a^{K+1})$$ → 2 ESPRESSIONI DELLA STESSA SERIE!

$$(a^2 + \ldots + a^K) = \frac{a - a^{K+1}}{1-a}$$ → $a^{K+1} \to 0$ RICAVO UNA RAPPRES. NON ACCETTABILE!!

UN NUMERO REALE $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ È CARATTERIZZATO DA:

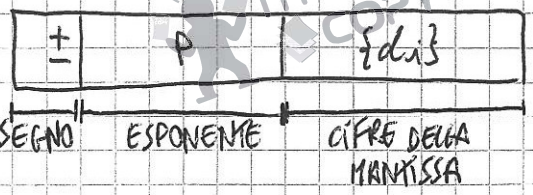
1- $segn(x) = \pm 1$

2- $p \in \mathbb{Z}$

3- $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}, i \geq 1}$

N.B: "$d_1 \neq 0$" È NECESSARIA PER L'UNICITÀ, MA ANCHE PER TRASFERIRE L'INFORMAZIONE FORNITA DAGLI ZERI DOPO IL PUNTO, CON MINOR SPRECO DI MEMORIA, ALL'ESPONENTE p !!

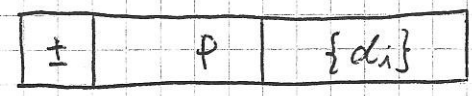
UN ALTRO ASPETTO IMPORTANTE È DATO DAL FATTO CHE IN MACCHINA SI HA UNA SEQUENZA FINITA DI CELLE DI MEMORIA:



ES: IEEE 754 → È UNO STANDARD ISTITUITO DA INGEGNERI ELETTRICI PER CREARE UNO STANDARD DELL'ARITMETICA DI MACCHINA

→ È UNO STANDARD IN DOPPIA PRECISIONE IN VIRGOLA MOBILE. È IN BASE 2!

ESSENDO UNO STANDARD IN DOPPIA PRECISIONE CONSIDERO 64 BITS:



p → 11 BIT → LA 1ª CIFRA DEFINISCE IL SEGNO DELL'ESPONENTE E LE ALTRE 10 CIFRE DEFINISCONO I VALORI DELL'ESPONENTE.

N.B:
QUESTA RAPPRESENTAZIONE FU' SCARTATA PERCHÉ LO 0 VENIVA RAPPR. 2 VOLTE!

SI VALGONO DUNQUE TUTTI GLI 11 BITS E SI RAPPRESENTANO TUTTI I NUMERI COMPRESI TRA: $\hat{p} = [0; 2047]$ $= 2^{11} - 1$ $\neq 2^{11}$ → $\hat{p} \in \mathbb{N}$, TOLTO IL BIT DEL SEGNO!!

$p = \hat{p} - 1022$ $\quad p \in [-1022; 1025]$

A QUESTO PUNTO ISOLO 2 SEQUENZE: $\hat{p} = [0|\ldots|0]$ E $\hat{p} = [1|\ldots|1]$

E CONSIDERO $\hat{p} \in [-1021; 1024]$

SU 52 BITS HO 53 CIFRE! INFATTI HO CHE:

$d_1 = 1$ → NON VIENE RAPPRESENTATA PERCHÉ POTREBBE ESSERO ASSOCIATO AD UNO 0 E DUNQUE NON SAREBBE PIÙ UNA RAPPR. NORMALIZZATA. → SE FOSSE 0 → NUMERI DENORMALIZZATI

$$x = \pm 2^p \sum_{i=1}^{53} d_i \cdot 2^{-i} \qquad d_1 = 1 \qquad 0 \leq d_i \leq 1$$

$$p \in [-1021; 1024]$$

↳ NUMERI NORMALIZZATI IN MACCHINA (IN DOPPIA PRECISIONE)

SE INVECE TRATTASSI LE 2 SEQUENZE CHE AVEVO SCARTATO HO CHE:

SE $\hat{p} = [0|\dots|0]$ → $x = \pm 2^{-1022} \sum_{i=1}^{52} d_i 2^{-i}$ → il d_1 POTREBBE ESSERE 0

↳ NUMERI DENORMALIZZATI

SE $\hat{p} = [1|\dots|1]$ → ALLORA DIPENDE DAL CAMPO DI CIFRE CONSIDERATE:

1) SE $d_2 = d_{53} = 0$ → $\pm\infty$ $(1/0)$

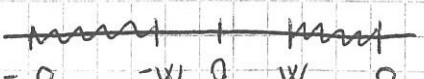
2) ALTRIMENTI → NaN (Not a Number → DESCRIVE LE FORME INDETERMINATE)

N.B: DUNQUE p DEVE ESSERE VALUTATO ALL'INTERNO DI UN RANGE DI VALORI, IN CUI HO:

1) w (omega piccolo) $= 2^{-1021} \cdot 2^{-1} = 2^{-1022}$ → + PICCOLO NUMERO DI MACCHINA NORMALIZZATO POSITIVO

2) Ω (omega grande) $= 2^{1024} \sum_{i=1}^{53} 2^{-1}$ → + GRANDE NUMERO DI MACCHINA NORMALIZZATO POSITIVO

I NUMERI DI MACCHINA SI DISTRIBUISCONO TRA (w, Ω) E $(-\Omega, -w)$:



w = NUMERI NORMALIZZATI

= NUMERI DENORMALIZZATI

→ INSIEME DI NUMERI SYM RISPETTO ALLO 0!

→ SI HA UNA DIVERSA DISTRIBUZIONE DEI NUMERI; SI HA UN'ALTA DENSITÀ PER PICCOLI NUMERI DI MACCHINA E POI SI DIRADA.