Lunedì 10/10 16:30 - 17:30 Recupero Ore
17/10

Esame: Orale con Elaborato
↳

Propedeuticità: Algebra
Analisi I

Ricevimento: su appuntamento cecilia.magherini@unipi.it (Martedì Mercoledì)
Ex-dipartimento matematica applicata
via Filippo Buonarroti 1/C

Memo: iscriviti su E-learning
+ 1 appello ad Aprile
+ 1 appello a Novembre

o o

Calcolo Numerico: settore della matematica che si occupa di definire e studiare dei metodi (metodi numerici) per determinare una approssimazione nella soluzione di problemi matematici.

Principali Proprietà che si richiedono a un metodo numerico
1) fornire una approssimazione accurata
2) avere un basso costo computazionale
3) facilmente implementabile su un calcolatore

master cozy costiera 050/8312126 388/9837745

Misure dell'errore

Soluzione esatta: $x \in \mathbb{R}$
soluzione approssimata: $\tilde{x} \in \mathbb{R}$

$\Delta x = \tilde{x} - x$ errore assoluto

$10^{-4} \leq \Delta x \leq 10^{-3}$ Grande o piccolo? dipende dal valore di x
se $x = 10^{8} \rightarrow$ piccolo
se $x = 10^{-8} \rightarrow$ grande

Errore relativo $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \quad x \neq 0$

$$\varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} \iff \frac{\tilde{x}}{x} = 1 + \varepsilon_x \iff \tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x)$$

ε_x si confronta con 1 per sapere se è grande o piccolo
$\varepsilon_x = 10^{-3} = 0{,}1\ \% \rightarrow$ piccolo
$\varepsilon_x = 0{,}9 = 90\ \% \rightarrow$ grande

Tipologie di errore:

1) Errori di discretizzazione o troncamento
2) Errori di convergenza
3) Errori di round-off

① Errori di discretizzazione:
errori legati alla definizione del metodo numerico.

problema esatto
dominio continuo
→ errore di discretizz. →
problema discreto
dominio discreto

un calcolatore elettronico non lo può gestire....

Esempio. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $f'(x_0)$ derivata

↓ sufficientemente regolare

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

↓ su un dominio continuo

$\bar{h} \neq 0$ $|\bar{h}|$ piccolo $\quad f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+\bar{h}) - f(x_0)}{\bar{h}} = \varphi_{\bar{h}}(x_0)$

$$f(x_0+\bar{h}) = f(x_0) + f'(x_0)\bar{h} + \frac{1}{2} f''(\xi)\bar{h}^2 \qquad \xi \text{ compreso fra } x_0 \text{ e } x_0+\bar{h}$$

↓ $x_0+\bar{h}-x_0$

$$\varphi_{\bar{h}}(x_0) - f'(x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi)\cdot\bar{h} = O(\bar{h})$$

[N.B. $g(\bar{h}) = O(\bar{h})$ se $\left|\dfrac{g(\bar{h})}{\bar{h}}\right| \leq C$]

$$\approx f(x_0) + f'(x_0)\bar{h}$$

l'errore nasce da qui (troncamento sviluppo di Taylor)

2) Errori di convergenza

sono causati dall'utilizzo di un metodo iterativo

$\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ $\lim_{m \to +\infty} x_m = x^*$ soluzione esatta del problema

$x_N - x^*$ = errore assoluto di convergenza

esempio.

$x_0 = 2$

$x_{m+1} = \frac{1}{2}\left(x_m + \frac{2}{x_m}\right)$ $m = 0, 1, \ldots$

$x_0 = 2$ $x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \ldots\ldots$

$\lim_{m \to +\infty} x_m = \sqrt{2}$ (si vede poi....)

x_m non sarà mai esattamente uguale a $\sqrt{2}$: devo stabilire un criterio di arresto, e $x_N - x_m$ sarà l'errore di convergenza.

su questo metodo numerico

$x_4 - \sqrt{2} = 10^{-12}$

3) Errori di round-off

Dovuti all'utilizzo di un calcolatore elettronico.

(I) Errori di rappresentazione → numeri interi, numeri reali

(II) Errori introdotti durante il calcolo

Numeri naturali

Sistema posizionale in base $b = 10$

$0, 1, 2, \ldots, 9$ ↔ i primi 10 numeri naturali

N cifre $\underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_N}$ $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots 9\}$ $i = 1, \ldots, N$

$$n = \alpha_1 \cdot 10^{N-1} + \alpha_2 \cdot 10^{N-2} + \ldots + \alpha_N \cdot 10^0$$

esempio $818 \leftrightarrow n = 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

$\alpha_1 = \alpha_3 = 8$

$\alpha_2 = 2$

N cifre → rappresentare in maniera esatta tutti i naturali dell'insieme $\{0, 1, \ldots, 10^N - 1\}$

se $N = 3$ $10^3 - 1 = 999$

master copy COPISTERIA 050/832126 388/9837745

sistema posizionale in base $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

$0, 1, \dots, b-1$ $\leftrightarrow$ corrispondono ai primi b numeri naturali

$b = 2$ $\quad 0, 1$

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N \longleftrightarrow m = \alpha_1 \cdot b^{N-1} + \alpha_2 b^{N-2} + \dots + \alpha_N \cdot b^0$$

$\alpha_i \in \{0, 1, \dots b-1\}$ numeri naturali rappresentabili con N cifre $\{0, 1, \dots, b^N - 1\}$

Numeri Interi

(i) Rappresentazione "tipo" complemento a 2

c'è α_0 in più

$$\underbrace{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}$$

NO

$$m = \alpha_0 \{ \alpha_1 \cdot b^{N-1} + \alpha_2 b^{N-2} + \dots + \alpha_N b^0 \}$$

$\alpha_i = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ $\quad i = 1, \dots, N$

$\alpha_0 = \{+, -\}$

NO perché $m = 0$ verrebbe rappresentato 2 volte

$$\underbrace{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}$$

$$\rightarrow m = \begin{cases} \alpha_1 b^{N-1} + \alpha_2 b^{N-2} + \dots + \alpha_N b^0 & \text{se } \alpha_0 = + \\ (\alpha_1 b^{N-1} + \alpha_2 b^{N-2} + \dots + \alpha_N b^0) - b^N & \text{se } \alpha_0 = - \end{cases}$$

$0 \leq m \leq b^{N-1}$ se $\alpha_0 = +$

$-b^N \leq m \leq -1$ se $\alpha_0 = -$

N cifre $\rightarrow$ posso rappresentare $\{-b^N, \dots, -1, 0, 1, \dots b^N - 1\}$

N.B voglio scrivere 3 in $b = 10$, $N = 3$ $\quad \underbrace{\alpha_0 = + \ \alpha_1 = 0 \ \alpha_2 = 3}_{+03}$

MA! $-03 \neq -3$

master cozy CONFISERIA 050/8312126 388/9837745

(ii) Rappresentazione con shift

Fisso $\nu \in \mathbb{N}$ → shift

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_N$ $\quad \alpha_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ $\quad i = 1, \dots, N$

$\updownarrow$

$m = (\alpha_1 b^{N-1} + \dots + \alpha_N b^0) - \nu$

numeri che posso rappresentare con N cifre $\quad \{-\nu, -\nu+1, \dots, b^N - 1 - \nu\}$

master COPY COPISTERIA

Numeri Reali

$b = 10$

$x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0$

$x = \rho \cdot b^{\eta}$ (mantissa, esponente)

Notazione scientifica (o in virgola mobile) normalizzata

$|\rho| \in [1, 10)$

$\eta \in \mathbb{Z}$

normalizzata se $1 \leq \rho < 10$

Esempio

$x = 78,54$

$= 7,854 \cdot 10^1$ $\quad \rho = 7,854$, $\eta = 1$

$7,854 = 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$

Base $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

se $x \neq 0$ $\quad x = \rho \cdot b^{\eta}$

$|\rho| \in [1, b)$

$\eta \in \mathbb{Z}$

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745