APPUNTI COMPLETI DI CALCOLO NUMERICO (prof. Gemignani)

Contiene:

- TUTTE LE LEZIONI ACCURATAMENTE SBOBINATE
- TUTTE LE ESERCITAZIONI " "
- TUTTI I RICEVIMENTI SVOLTI DAL PROFESSORE
- LA CORREZIONE DI TUTTE LE SIMULAZIONI D'ESAME FATTE DAL PROF

(unica lezione mancante è la 1° lezione sui numeri di' macchina)

master COPY

master COPY

master COPY

ANALISI DELL'ERRORE

NB ho voluto il modulo sia di C che degli ERRORI

L'aritmetica di macchina genera 2 tipi di errori: ε_{in}, ε_{alg}

IL MODULO DEL PRODOTTO è uguale al prodotto dei moduli, IL MODULO della SOMMA è ≤ della somma dei moduli

ε_{in} è dovuto all'approssimazione del dato x con $\tilde{x}$

$\tilde{x} = x(1+\varepsilon_x)$ — dove $\tilde{x} = fl(x)$

ERRORE DI RAPPRESENTAZIONE

$|\varepsilon_x| \leq u$

ε_{alg} l'operazione di macchina è un'operazione approssimata

la funzione è la stessa $\oplus$ (o solito etc.)

$\tilde{x} \oplus \tilde{y} = fl(\tilde{x}+\tilde{y}) = (\tilde{x}+\tilde{y})(1+\varepsilon)$

$|\varepsilon| \leq u$

ε l'errore locale dell'operazione

DEF DI ERRORE INERENTE

DEF DI ERRORE INERENTE: non dipende dall'algoritmo usato.

$\varepsilon_{in} = \dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$ ricavo tramite Taylor:

$$f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x}-x) + f''(\xi)\frac{(\tilde{x}-x)^2}{2} \quad \text{con } \xi \in [\tilde{x}, x]$$

Ricavo $\varepsilon_{in} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\dfrac{(\tilde{x}-x)}{x}x + \dfrac{f''(\xi)}{f(x)}\dfrac{(\tilde{x}-x)^2}{2x^2}x^2$ poi $\dots$

$$\varepsilon_{in} = \frac{f'(x)}{f(x)}\varepsilon_x x + \frac{f''(\xi)}{f(x)}\varepsilon_x^2\frac{x^2}{2}$$

in un'analisi del 1° ordine:

$$\varepsilon_{in} \doteq \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\varepsilon_x\right)x$$

$\frac{f'(x)}{f(x)}$ coeff di amplificazione

nota se ho una funzione a più variabili si ha:

$$\varepsilon_{in} = \frac{1}{f(x)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\varepsilon_{x_i}x_i\right]$$

ed è ciò che determina il CONDIZIONAMENTO DELLA FUNZIONE

Se $C_x \uparrow$ ε_{in} è amplificato ($C_x = \infty$ ε_{in} esplode Mal condizionato)

$*f(x,y) = x+y \rightarrow \varepsilon_{in} = \frac{1}{x+y} x\,\varepsilon_x + \frac{1}{x+y} y\,\varepsilon_y$ $*f(x,y) = xy = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

$*f(x,y) = \frac{x}{y} \quad \varepsilon_{in} = \frac{x}{x+y}\varepsilon_x - \frac{y}{x+y}\varepsilon_y$ $*f(x,y) = \frac{x}{y} = \varepsilon_x - \varepsilon_y$.

AALIANCE2
European Next Generation Ambient Assisted Living Innovation Alliance
www.aaliance2.eu

DEF DI ERRORE ALGORITMICO

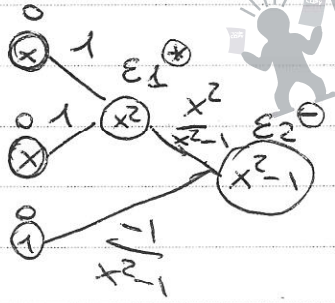
DEF DI ERRORE ALGORITMICO

$$\varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

Sviluppo con il grafo mettendo sui nodi gli errori locali delle operazioni e negli archi i coefficienti C di amplificazione

Nota poco dopo per calcolare ε_{alg} DIPENDE DALL'ALGORITMO che uso emi dice se è STABILE O MENO in base al fatto che dipendo o no dai dati in ingresso.

es $x^2-1 = (x-1)(x-1)$



$$\varepsilon_{alg} = \varepsilon_2 + \frac{x^2}{x^2-1}\varepsilon_1$$

DEF DI ERRORE TOTALE

DEF DI ERRORE TOTALE

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg}$$

Dimostrazione

$$\frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \overset{\text{aggiungo e sottraggo } f(\tilde{x})}{=} \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} =$$

$$= \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(x)} + \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \varepsilon_{in} + \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \cdot \frac{f(\tilde{x})}{f(x)}$$

(moltiplico e divido per $f(\tilde{x})$) (ε_{in}) (ε_{alg}) ($\varepsilon_{in}+1$)

$$= \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg}(\varepsilon_{in}+1) \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg}$$

DEF ERRORE ANALITICO

DEF ERRORE ANALITICO

$$\varepsilon_{anal} = \frac{f(x) - h(x)}{f(x)}$$

nell'approssimare una funzione irrazionale $f(x)$ con una funzione razionale $h(x)$

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow C = \frac{1}{2}$

"AALIANCE2 project is a Coordination Action funded by the European Programme FP7 IC7 - 2011.5.4 (Project reference: 288705)"

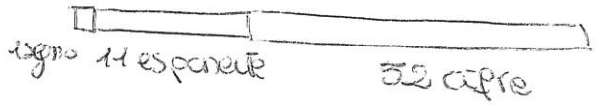
ESERCITAZIONE 3/3/2020

MatLab → è una calcolatrice (un ambiente di calcolo)
→ è un linguaggio di programmazione (ci permette di implementare gli algoritmi)

COME AMBIENTE DI CALCOLO

Matlab implementa lo standard 754 usando registri lunghi **64 bits** (**doppia precisione**)
Questi 64 bit sono organizzati:

64 ← 1 per il segno della mantissa
64 ← 11 per l'esponente
64 ← 52 per le cifre



La base di numerazione è 2.
se abbiamo 52 cifre dovrei $t = 53$ perché il 1° bit è nascosto perché in notazione normalizzata deve valere 1.

- L'esponente come nel caso del registro lungo 32 è usato in TRASLAZIONE (non abbiamo il segno)
  Gli interi vengono rappresentati da
  da 0 0
  a 1 . . . . . 1 $= 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2047$ (sono 11)
  Nel campo esponente sono rappresentati i naturali da 0 a 2047 ovvero 2048 naturali.

  La configurazione 0 . . . . 0 vengono tenute da parte per
  1 1
  rappresentare altri oggetti.
  Quindi abbiamo a disposizione $2048 - 2 = 2046$ configurazioni da 1 a 2046 che vengono usate in traslazione nel campo esponente per rappresentare un range di $[-m, M] = [-1021, 1024]$

  $m = 1021$
  $M = 1024$
  } uso la stessa notazione usata per scrivere l'insieme dei numeri di Macchina $(F(\beta, \ , m, M))$

Ho così tutti i dati per caratterizzare l'insieme dei numeri di macchina in MATLAB normalizzati.
Ma ce anche altro: