Calcolo numerico

12/03/2018

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE IN BASE

Sia $B \in \mathbb{N}$ $B > 1$

Sia $x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0$

Allora $\exists!$ (esiste ed è univocamente determinato)

① $p \in \mathbb{Z}$

② $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ → successione di numeri naturali $\quad d_1 \neq 0 \quad 0 \leq d_i \leq B-1 \quad d_j$ non def $= B-1$

t.c. $x = \text{sgn}(x)\, B^p \sum_{i=1}^{+\infty} d_i B^{-i}$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

- B → base in cui contiamo, base di numerazione
- x → numero reale non nullo
- p → esponente (intero relativo)
- d_i → sequenza di cifre (successione) → cifre della rappresentazione
- d_j non def $= B-1$ → non voglio che da un certo punto in poi di abbia tutti i termini uguali a $B-1$
  $\nexists k$ t.c. $\forall j > k \quad d_j = B-1$
  ↓ garantisce l'unicità della rappresentazione
  es. $0,\overline{9} = 1 \rightsquigarrow 0,1 \cdot 10^1$
  ↓ sarebbe normalizzato ma non è buona
- $\sum_{i=1}^{+\infty} d_i B^{-1}$ → mantissa
- $x = \text{sgn}(x)\, B^p \sum_{i=1}^{+\infty} d_i B^{-i}$ → rappresentazione normalizzata in virgola mobile di x in base B
  ↓ floating point
- normalizzato → $d_1 \neq 0$ vogliamo la 1ª cifra significativa $\neq 0$ e parte intera nulla → per l'unicità
- virgola mobile → la posizione della virgola viene aggiustata dall'esponente in modo da avere la rappresentaz. normalizzata

Dimostrare che $\sum_{i=1}^{+\infty} 4^{-i} = \frac{1}{3}$ → questo mi dice che $\frac{1}{3}$ è periodico anche in base 2

quindi il calcolatore tronca la rappresentazione e memorizza qualcosa che non è $\frac{1}{3}$ ← non è detto che i numeri periodici in una base siano periodici in un'altra

ecco perché matlab rispondeva male a $(-1)^{1/3}$

da macchina memorizza i numeri su registri di lunghezza finita → non memorizza tutti i numeri

↓

andrà a rappresentare un sottoinsieme dei numeri reali

Virgola fissa → abbandonata perché veniva utilizzato molto spazio per cifre inutili

≠

Virgola mobile → 

↓ 1° zona: segno; 2° zona: esponente p; 3° zona: cifre della mantissa

registro a lunghezza finita

↓

non posso rappresentare tutti gli interi, ma solo quelli in un certo range

↓

INSIEMI DI MACCHINA (insiemi rappresentabili in macchina)

$$F(B, t, m, M) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \pm B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i}, \right.$$

$$\left. d_1 \neq 0, \ 0 \leq d_i \leq B-1, \ -m \leq p \leq M \right\} \cup \{0\}$$

supponiamo di avere t celle di memoria, in ognuna delle quali possiamo rappresentare una cifra della rappresentazione (mantissa), poi abbiamo alcune celle per l'esponente e per il segno

↓

i numeri rappresentabili saranno $x = \pm B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-p}$, con p che viaggia in un range fissato

↓

non c'è di non def... perché la rappresentazione è finita e non avrebbe senso dire "non definitivamente uguale"

a questo insieme aggiungiamo lo 0

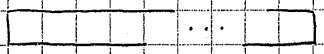
↓

lo 0 è fuori dal teo. di rappresentaz. ($x \neq 0$) perché 0 non ha una rappresentazione normalizzata, però vogliamo che sia un numero di macchina

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

ESEMPIO

registro lungo 32 bit



$B = 2$

1 bit per il segno

8 bit per l'esponente (di cui 1 per il suo segno)

23 bit per le cifre della mantissa

ESPONENTE → 1° opzione $p = \pm (d_1 2^0 + \dots + d_7 2^6)$ $[-127, \overset{2^7-1}{\uparrow} 127]$

↓

scontata per la doppia rappresentazione dello 0 (± 0)

→ 2° opzione $p = d_1 2^0 + \dots + d_8 2^7 = 255$ $[-127, 128]$

↓

si rappresenta p in traslazione

↓

si rappresentano tutti i naturali tra 0 e 255, ma poi si opera in traslazione → l'esponente viene traslato

2^{p-127} → la macchina sa che se metto 0 (ad esempio) l'esponente è -127

MANTISSA → dato che ho 23 bit potrei pensare di rappresentare $\sum_{i=1}^{23} d_i 2^{-i}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

↓

ma la macchina rappresenta $2^{-1} + \sum_{i=2}^{24} d_{i-1} 2^{-i}$

↓

perché stiamo rappresentando i numeri in notazione normalizzata e d_1 deve essere $\neq 0$, ma se siamo in base 2 e $d_1 \neq 0$, d_1 non può essere $= 1$; la macchina fa sì e non rappresenta d_1

↓

si memorizza le ventitré cifre successive alla prima, perché so che questa deve essere 1 per forza lavorando in notazione normalizzata

Dunque l'insieme dei numeri di macchina rappresentabili su questo registro sono:

$F(2, 24, 127, 128)$

↳ in realtà ci è qualche variazione ma prima del 1985 no così

OSSERVAZIONI sui numeri di macchina

① L'insieme dei numeri di macchina ha cardinalità finita
↓
n° finito di elementi → quanti sono?

① p → $m + M + 1$ valori

② d_1 → $B - 1$ valori
↓
③ Le altre $t-1$ cifre possono assumere B valori (tra 0 e B-1)

$$② \; (M + m + 1) \; (B-1) \; B^{t-1} + ① \rightarrow \text{zero}$$
$$\quad ① \qquad ② \qquad ③$$

simmetrico rispetto all'origine dell'insieme dei n di macch.

numero dei numeri di macchina (cardinalità) esattamente rappresentabili su una macchina che opera in base B, con t cifre della mantissa e con un esponente compreso tra -m e M

② Qual è il più piccolo numero di macchina positivo non nullo rappresentabile?
↓
$$\omega = B^{-m} \cdot B^{-1} = B^{-m-1}$$

esponente più piccolo

per le cifre prendo la 1ª cifra che non può essere 0 e quindi gli do valore 1 e tutte le altre 0

Qual è il più grande numero di macchina rappresentabile?
↓
$$\Omega = B^M \underbrace{(B-1)} \sum_{i=1}^{t} B^{-i}$$

posso ammettere tutte le cifre = B-1 perché non ha senso il vincolo di non def = B-1 su una sequenza limitata, quindi porto fuori B-1

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9637745

③ Qual è la distanza tra due numeri di macchina consecutivi?

↓

prendo un numero di macchina $x = (-1)^s B^p (\alpha)$ → mantissa

il consecutivo sarà $y = (-1)^s B^p (\alpha + B^{-t})$

↓

aggiungo 1 alla t-esima cifra

la distanza è $|x - y| = B^{p-t}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Questa serie di informazioni ci dice che:

1) l'insieme dei numeri di macchina è simmetrico, di cardinalità finita

2) l'insieme dei n di macchina è compreso tra $-\Omega, -\omega$ e ω, Ω

↓



3) l'insieme dei n di macchina non è equispaziato in questo intervallo

↓

questa distanza dipende da p → p è una misura di quanto è grande il numero

↓

non dipende da t poiché t è una caratteristica della macchina, è il n° di cifre con cui rappresentiamo il numero

↓

la relazione $|x - y| = B^{p-t}$ dice che la distanza tra numeri di macchina è piccola se i numeri sono piccoli e grande se sono grandi

↓

i numeri sono addensati per valori piccoli e si diradano progressivamente man a mano che si procede verso il valore Ω

↓

la distanza dipende dalla grandezza del numero

↓

questo perché noi non siamo interessati all'errore come distanza (come valore assoluto), ma siamo interessati alla percentuale di errore

↓

vogliamo errori piccoli su dati piccoli e errori eventualmente più grandi su dati grandi