master COPY COPISTERIA

CALCOLO NUMERICO

master COPY

Attenzione: Gli Appunti sugli argomenti non presenti all'esame (Metodo delle Potenze e Integrazione) non sono molto accurati

master COPY COPISTERIA

master COPY

Aritmetica di macchina e analisi degli errori

Come possiamo rappresentare i numeri?

$0,1 = \frac{1}{10}$ // $x \in \mathbb{Q}$ $x = (a,b)$

$0,01 = 0,1 \cdot 10^{-1}$ più utile perché evita di rappresentare zeri superflui

master COPY COPISTERIA

rappresentazione normalizzata di $0,01$

$$0,01 = +10^{p}(d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} + \dots)$$
$$= d_1 10^{p-1} + d_2 10^{p-2} + \dots$$
$$= 10^{-1}(1 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} \dots)$$

$\nu\, 10^{0}(0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} \dots)$ → Non normalizzata perché la prima cifra non è $\neq 0$

0 non ha una rappresentazione normalizzata

$0,\bar{9} = 1$

$$1 = 10^{1}(1 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} \dots)$$

$0,\bar{9} = \cancel{10^{0}(9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} \dots)}$ → di definitivamente uguale a 10^{-1}

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \dots$$
$$= 9/10\,(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots)$$

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a^i = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} a^i$$

master COPY

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^k)(a - 1) = a^{k+1} - 1$$

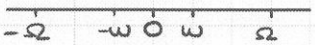
$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} a^i = \frac{a^{k+1} - 1}{a^k - 1} \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{a^{k+1} - 1}{a^k - 1} = \frac{1}{1 - a}$$

Insieme dei numeri di macchina

la distribuzione è simmetrica rispetto a 0

min $\omega = + B^{-m} \left(1 B^{-1} + 0 B^{-2} + \dots + 0 B^{-t} \right)$

Max $\Omega = + B^{M} \left((B-1)(B^{-1} + B^{-2} + \dots + B^{-t}) \right)$



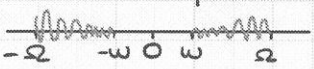
successivo

$x = B^{p} (d_1 B^{-1} + \dots + d_t B^{-t})$

$y = B^{p} (d_1 B^{-1} + \dots + (d_t - 1) B^{-t})$

$x - y = B^{p} B^{-t} = B^{p-t}$

non è un problema perché valuto l'errore relativo



Esempio

$F(10, 3, m, M)$

$0,1 = 10^{0} (1 \cdot 10^{-1})$

$0,00035 = 10^{-3} (3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2})$

$0,100\,35 = 10^{0} (1 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5})$

2 → non è numero di macchina perché ho bisogno di più di 3 cifre per rappresentarlo

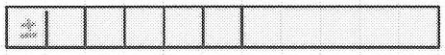
Esercitazione 01/03/22

Standard IEEE per l'aritmetica di macchina

Fissata su sistema binario. (Base 2)



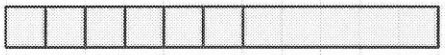
- Rappresentazione dell'esponente $[p \in \mathbb{Z}]$



$d_0 2^0 + \cdots + d_9 2^9$

Non viene usato perché lo zero sarebbe utilizzato due volte (± 0)

TRASLAZIONE



$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \cdots + 1 \cdot 2^{10} = 2^{11} - 1 \longrightarrow 0 \leq n \leq 2047$

Posso rappresentare 2048 configurazioni

escludo le config. $1 \cdots 1$ e $0 \cdots 0$ per situazioni limite $\Rightarrow$ 2046 config

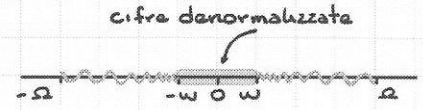
$1 \leftrightarrow -1021$
$\vdots$
$2046 \leftrightarrow 1024$

$m = -1021$
$M = 1024$

La rappresentazione di macchina è normalizzata,
Ovvero la prima cifra è sempre 1
Per questo la prima cifra viene trascurata e le cifre significative diventano 53

$t = 53 \rightarrow u = 2^{-53} \simeq 10^{-16}$

standard di arrotondamento



- se $0 \cdots 0 \Rightarrow p = -1022$

$\Rightarrow$ cifre denormalizzate

$2^{-1022} (d_1 \cdot 2^{-1} + \cdots + d_{52} \cdot 2^{-52})$

se $d_1 = \cdots = d_{52} = 0$ allora sto rappresentando $\emptyset$

- se $1 \cdots 1 \Rightarrow p = 1025$

utile per simboli matematici

- $+inf$
- $-inf$
- NaN

$[1/0 = inf \quad 1/inf = 0 \quad \frac{inf}{inf} = NaN \quad +inf - inf = NaN]$

più piccolo numero denormalizzato

$2^{-1022} \cdot 2^{-52} = 2^{-1074}$

Help … - per vedere la definizione di un comando
Format long - per visualizzare tutte le 16 cifre decimali
Realmin - rappresenta il minimo numero positivo normalizzato rappresentabile (2^(-1022))
Realmax - rappresenta il più grande numero finito normalizzato rappresentabile
F=@(x) … - per definire una funzione in funzione di x (f(n) per valutare in n)

master COPY COPISTERIA
master COPY
master COPY COPISTERIA
master COPY