Richiami di algebra vettoriale

VETTORE

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dove $x_i \in \mathbb{R}$ e sono le componenti del vettore

NORMA DEL VETTORE

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

VERSORE

$$\text{vers}(x) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

PRODOTTO SCALARE

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

significato geometrico

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}(u_2 v_3 - u_3 v_2) - \hat{j}(u_1 v_3 - u_3 v_1) + \hat{k}(u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

significato geometrico

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\theta)$$

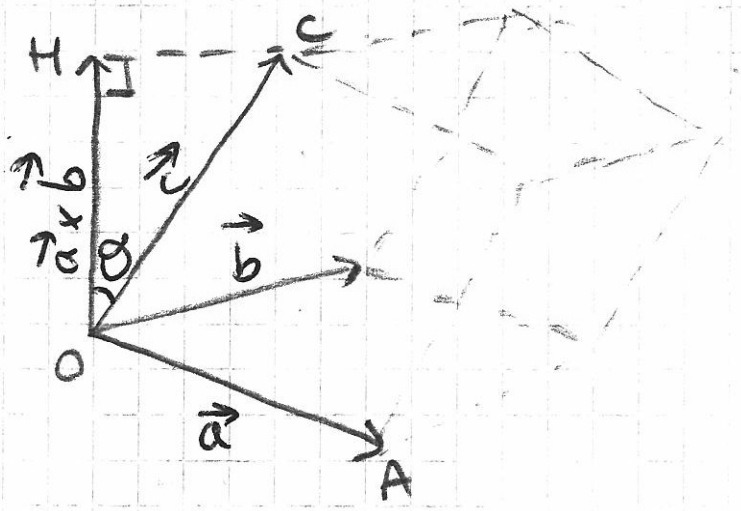
PRODOTTO MISTO

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

dove $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono 3 vettori indipendenti nello spazio.

significato geometrico ($\vec{u}=\vec{a}$, $\vec{v}=\vec{b}$, $\vec{w}=\vec{c}$)

$\Rightarrow$ corrisponde al volume di un parallelepipedo



$V_{parallelepipedo} = A_b \cdot h$

$A_b = \| \vec{a} \times \vec{b} \|$

$h = OH = \| \vec{c} \| \cos(\theta)$

$V_{par} = \| \vec{a} \times \vec{b} \| \| \vec{c} \| \cos(\theta)$

$= \| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \|$

I: Integrali curvilinei

Curve ①

Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tale che Γ è immagine di una applicazione $\varphi: \Delta \to \mathbb{R}^n$, dove $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo di $\mathbb{R}$, limitato o no. (Γ = curva)

DEF. PARAMETRIZZAZIONE (γ)

La coppia (φ, Δ) tale che $\varphi \in C(\Delta)$ e $\varphi(\Delta) = \Gamma$ è una PARAMETRIZZAZIONE di Γ

Se $\Delta = (a,b)$, la parametrizzazione γ in $\mathbb{R}^n$ è definita dalla tripla $(\varphi, (a,b), \Gamma)$ dove $\Rightarrow \varphi: (a,b) \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi((a,b)) = \Gamma$ e φ è una funzione continua.

Per cui si può dire che $x = \varphi(t)$, $t \in I$ è la parametrizzazione della curva γ.

DEF. PARAMETRIZZAZIONE REGOLARE (γ REG)

La parametrizzazione definita con $x = \varphi(t)$, $t \in I$ dove I è un intervallo aperto è $\Rightarrow \varphi: I = (a,b) \to \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ è detta REGOLARE se è di classe C^1 ed inoltre $\varphi'(t) \neq 0$, per ogni $t \in I$.

Dire che è di classe C^1 significa che la derivata esiste ed è continua.

data $\gamma: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ con $t \in I$ la curva si dice

REGOLARE se x, y, z sono differenziabili e la loro derivata è continua; cioè esistono $x'(t), y'(t), z'(t)$ e sono CONTINUE.
In termini di vettori significa che $(x'(t), y'(t), z'(t))$ cioè il vettore tangente è diverso da $(0,0,0)$.

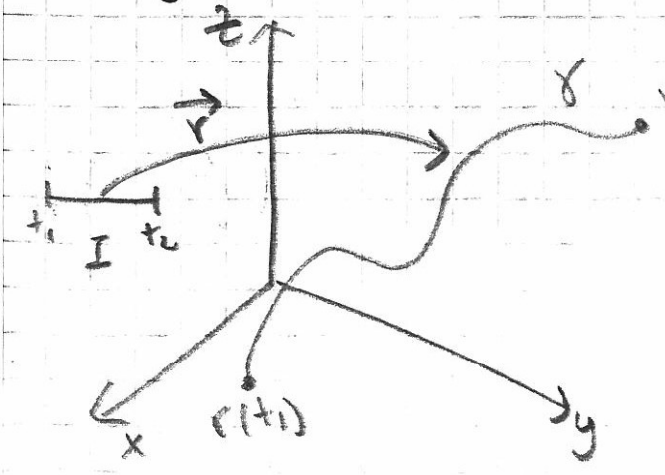
DEF. ARCO DI UNA CURVA CONTINUA

Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$. Si dice ARCO DI UNA CURVA CONTINUA in $\mathbb{R}^n$ una funzione $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ continua (f.c. le sue componenti sono continue) $(\vec{r}=\varphi)$

SOSTEGNO DELLA CURVA = immagine della funzione (insieme degli $\mathbb{R}^n$ percorsi dal punto mobile)

CURVA PIANA $\Rightarrow$ se esiste un piano che contiene il suo sostegno

Un arco di curva continua γ è la coppia costituita da una funzione continua $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ $(\vec{r}=\varphi)$ che chiamiamo PARAMETRIZZAZIONE della curva, e un insieme di punti di $\mathbb{R}^n$ che chiamiamo sostegno della curva.



$\vec{r}=\varphi$

$\vec{r}: [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$

con $\vec{r}=(x,y,z)$

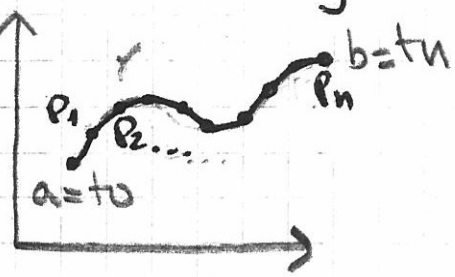
e $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $t \in [t_1, t_2]$

Lunghezza della curva (2)

Sia $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ la curva. Sia quindi P una partizione dell'intervallo $[a,b]$:

$$P = \{ t_i \in [a,b] : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \}$$

A P risulta associata la POLIGONALE inscritta in γ costituita dai punti



$\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_n)$. La lunghezza della poligonale è:

$$\|\varphi(t_0) - \varphi(t_1)\| + \dots + \|\varphi(t_{n-1}) - \varphi(t_n)\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|$$

. Questa lunghezza approssima per difetto la lunghezza di γ. Per definire $\ell(\gamma)$ si fa variare P in modo da considerare "il più grande" dei numeri della lunghezza della poligonale ottenuti:

$$L(\varphi) = \sup_P \sum_{i=1}^{n} \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|$$

Se tale valore non è ∞, la curva si dice rettificabile.

La lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione.

Veniamo ora al calcolo di $\ell(\gamma)$:

$|P_0P_1|$ = lunghezza di un segmento da P_0 a P_1