INDICE

- 1° periodo (pg. 1-63):
  - INTEGRALI CURVILINEI
  - CONTINUITÁ E DIFFERENZIABILITÁ DI FUNZIONI DI 2 VARIABILI
  - MASSIMI E MINIMI
- 2° periodo (pg. 64-164):
  - E.O. (pg. 64)
  - $\iint$ e $\iiint$ (p. 105)
  - $\iint_\Sigma$ e G.G.-Stokes (p. 135)
- Assignement del prof. + Soluzione (
  - 3 ASSIGNEMENTS
  - 1 SIMULAZIONE
- ESAMI con SOLUZIONE:
  - I° COMPITINO
  - II° COMPITINO — giorno 1 / giorno 2
  - 1° APPELLO
  - 2° APPELLO
  - 3° APPELLO
- RICEVIMENTO (Daniele Barbera) (2° periodo)
- Esercizi vari (1° periodo) (miei)
- Riassunto TEORIA PER L'ORALE (e Formulario)
- Domande ORALE

master COPY


master
COPY


master
COPY

ANALISI MATEMATICA II

27/09/19

prof. Vladimir Georgiev

esame: scritto + orale
(ammissione all'orale con 15)
ricevimento: lunedì 14÷16 (dip. Matem.)
programma corso on-line
(simile a quello di Magnani)

Testi di riferimento:
Vanno bene tutti i libri di analisi II

Faremo 2 prove d'esame
(Lo scritto vale per 1 anno accademico)
Se la media dei compitini è ≥15 si va direttamente all'orale!

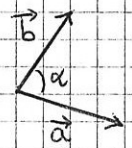
Materiale online:
- esercizi per compitini
- tracce delle lezioni (definizioni)

PUNTI AGGIUNTIVI alla media finale:
- VERDI: 0,5 → risoluzioni di qualche quesito (entro la pausa)
- ROSSI: 1 punto → trovare un errore grave a lezione.

Richiami di ALGEBRA LINEARE e GEOMETRIA:

Operazioni con vettori in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$
↓ piano ↓ spazio

Ci concentriamo su vettori nel piano e nello spazio (2ª e 3ª dimensione) (2D e 3D).
Un vettore può essere definito sia in $\mathbb{R}^2$ che $\mathbb{R}^3$.



PRODOTTO SCALARE → Il risultato è uno scalare! (un numero)
$\| \ \|$ = modulo (lunghezza) del vettore

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\alpha$$

Regola generale: $\vec{a}(x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ⇒ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Esempio 1: calcolo prodotto scalare

$\vec{a}$ (3, 2), $\vec{b}$ (1, 0) → $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3 \cdot 1) + (2 \cdot 0) = 3$

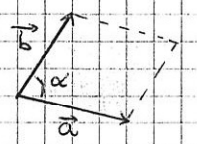
PRODOTTO VETTORIALE → è collegato con l'area; è nello spazio!

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$$

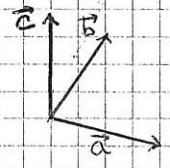
$$\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

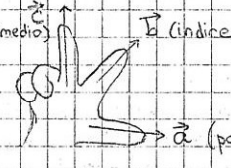
Il risultato è un vettore!
Per definire un vettore serve la lunghezza e l'orientazione!



Per calcolare l'area di questa figura ci serve il prodotto vettoriale.

I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono perpendicolari a $\vec{c}$.
Questa condizione ci dà 2 possibili versi di $\vec{c}$: entrante o uscente dal foglio.
Lo determino con la regola della MANO DESTRA:





Si definisce una TERNA CARTESIANA $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ad orientazione positiva

Esempio 2: Trasformare un vettore da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$:

$\vec{a}$ (3, 2) → in $\mathbb{R}^3$ diventa: $\vec{a}$ (3, 2, 0)
$\vec{b}$ (5, -1) → in $\mathbb{R}^3$ diventa: $\vec{b}$ (5, -1, 0)
($\mathbb{R}^2$) ($\mathbb{R}^3$)

△ Oltre a questi, abbiamo anche SOMMA/DIFFERENZA e PRODOTTO di un vettore con un numero reale.

Esempio 3: Calcolo prodotto vettoriale

$\vec{a}\,(5,3,0)$
$\vec{b}\,(2,1,0)$

Per calcolare $\vec{a}\times\vec{b}$ aggiungiamo una base in $\mathbb{R}^3$: $(\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})$ e risolviamo il determinante della matrice:

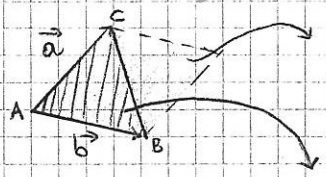
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + \vec{k}(\underbrace{5\cdot 1 - 2\cdot 3}_{\det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}) = -\vec{k}$$

(det. 3×3; segni alterni; det. 2×2)

⇒ Regola generale: (in $\mathbb{R}^3$)

$\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$
$\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$



(integrale doppio)
L'area del parallelepipedo è pari alla lunghezza del vettore.

$$\text{AREA} = \|\vec{c}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

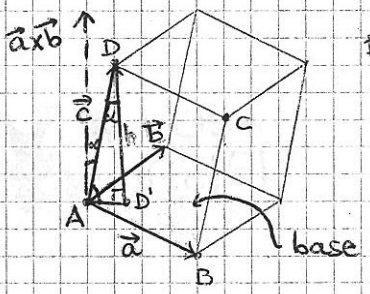
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$ Area (parallelogramma)

L'area di un triangolo (ABC) è pari alla metà dell'area del parallelogramma.

- 3 vettori permettono di introdurre un parallelepipedo: (P) (base ortogonale)

In $\mathbb{R}^3$ il prodotto vettoriale è un volume!

⚠ Se tutti e 3 i vettori fossero nel piano, Vol(P) sarebbe nullo.



D' = proiezione di D sul piano $\vec{a}\times\vec{b}$.

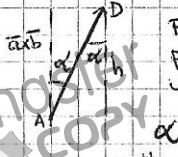
VOLUME PARALLELEPIPEDO?

$\text{Vol}(P) = \text{Area (base)} \cdot h$ (h = altezza)

$\text{Area base} = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$ → Deve essere un vettore ortogonale al nostro piano.

Altezza: Prendo il punto D e traccio la perpendicolare (vettore ortogonale) al piano definito da $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cioè faccio una PROIEZIONE ORTOGONALE del punto D sul piano AB. (D')

$h = \|\vec{c}\|\cos\alpha$



Poiché i 2 vettori sono paralleli, i 2 angoli sono uguali e valgono α.

α = angolo tra il prodotto vettoriale $\vec{a}\times\vec{b}$ e $\vec{c}$.

$$\text{Vol}(P) = \|\vec{a}\times\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\|\cos\alpha = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

É un prodotto scalare!

⚠ Serve il MODULO! (valore assoluto, poiché non conosco se l'angolo è positivo o negativo). (Deve essere positivo!)

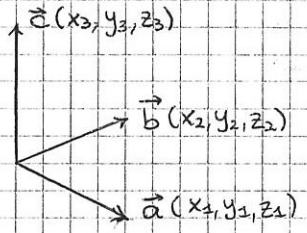
É un PRODOTTO MISTO di 3 vettori $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} \in \mathbb{R}$ $(\gtrless 0)$

Senza valore assoluto è tra chiamato VOLUME ORIENTATO, perché può essere positivo o negativo. Si può risolvere sempre con il determinante della matrice 3×3 (con coordinate cartesiane).
É definito solo nel piano ($\mathbb{R}^3$).

Riprendiamo il: 02/10/19

PRODOTTO MISTO tra 3 vettori $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$:



$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Il risultato di un prodotto misto è un numero (scalare) che può essere positivo o negativo: $\gtrless 0 \Rightarrow$ volume orientato.
- È definito solo nello spazio, non nel piano. (Per avere un parallelepipedo ci servono 3 vettori)
- Il volume del parallelepipedo è:

$$Vol_{PARALL.} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| \rightarrow \text{è il } \underline{\text{valore assoluto}} \text{ del prodotto misto}$$

▸ Esprimiamo il prodotto misto in coordinate cartesiane:
Prendiamo una base ortonormale:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} \ominus \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

(cancello la 1ª colonna; segni alterni; cancello la 2ª colonna)

Prodotto misto:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

(moltiplico scalarmente per $\vec{c}$; 1^a coordinata di $\vec{c}$; riga e colonna associata)

Se faccio il determinante della matrice 3×3, rispetto alla 3ª riga, ottengo la stessa espressione

questo coincide con:

$$\equiv \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = Volume_{PARALLEL.}$$

Il volume del parallelepipedo è il determinante della matrice 3×3 ottenuta con le coordinate dei vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Esempi di figure:

PARALLELOGRAMMA nel piano di vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$:



$$S_{\square} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

TRIANGOLO

$$S_{\triangle} = \tfrac{1}{2} S_{\square} = \tfrac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

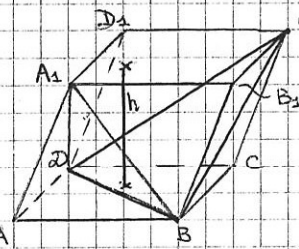
Abbiamo visto che la superficie (area) del parallelogramma formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il prodotto vettoriale. L'area del triangolo è, invece, metà area del parallelogramma!

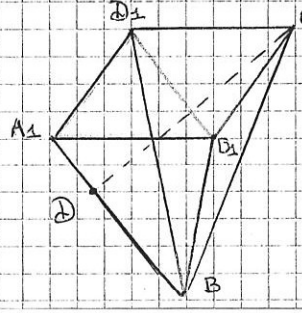
⇓

Il PRODOTTO VETTORIALE si usa per calcolare l'area S di varie figure!

PIRAMIDE?

Un discorso simile si può fare anche nello spazio con il parallelepipedo.
Ci chiediamo quante piramidi ci sono in un parallelepipedo, così da calcolare il volume di una piramide a partire dal volume del parallelepipedo.





h = altezza parallelepipedo = distanza fra 2 piani $< {ABCD \atop A_1B_1C_1D_1}$

base delle piramidi = parallelogramma = 2 triangoli $\{ {ABD \atop BCD}$