RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

HERMITIANO $X^H = (\bar{X})^T = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3 \ \cdots \ \bar{x}_N)$

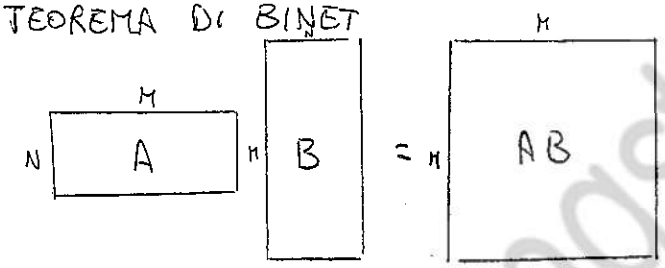
$$A^H = (\bar{A})^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{M1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1N} & \cdots & \bar{a}_{MN} \end{pmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

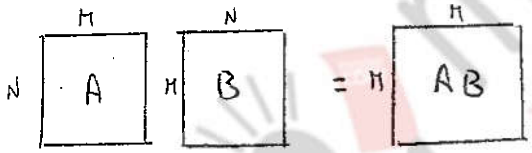
SE $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ $\exists \det(A)$

SE $\det(A) \neq 0$ $\exists!$ $A^{-1} : AA^{-1} = I$

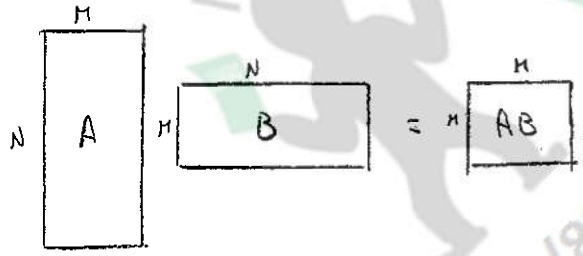
TEOREMA DI BINET



$\det(AB) = 0$ $\quad M > N$



$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ $\quad M = N$

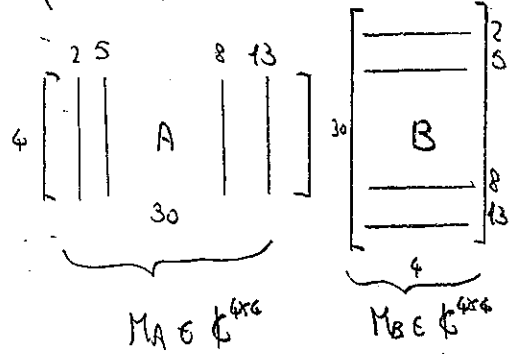


$\det(AB) = \alpha$ $\quad M < N$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\alpha = \sum_{\lambda} \det(M_{A_\lambda}) \cdot \det(M_{B_\lambda})$$

DOVE M_{A_λ} E M_{B_λ} SONO SOTTOMATRICI CORRISPONDENTI DI DIMENSIONE M



$$\det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

$Ax = b$ $\exists!$ SOLUZIONE $\iff$ $rg(A) = rg(A|b)$

SE $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ $\exists!$ SOLUZIONE $\iff$ $\det(A) \neq 0$

AUTOVALORI

$Ax = \lambda x$ $\quad (A - \lambda I)x = 0$ DATO CHE $x \neq 0$ ALLORA $(A - \lambda I)x = 0$

SE E SOLO SE $x \in \ker(A - \lambda I)$, QUINDI SE $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

DEVE ESSERE

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

$$\det(A - \lambda I) = 0 = \begin{cases} (-1)^N \lambda^N + (-1)^{N-1} \sigma_1 \lambda^{N-1} + (-1)^{N-2} \sigma_2 \lambda^{N-2} + \cdots + (-1)^2 \sigma_{N-2} \lambda^2 + (-1) \sigma_{N-1} \lambda + \sigma_N \\ (-1)^N (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdots (\lambda - \lambda_{N-1})(\lambda - \lambda_N) \end{cases}$$

σ_i: SOMMA DEI $\det$ DEI MINORI PRINCIPALI DI DIMENSIONE i DI A

λ^{N-1}: $(-1)^{N-1} \sigma_1 \lambda^{N-1} = (-1)^N (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \cdots - \lambda_N) \lambda^{N-1}$

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_N = tr(A) = \sum_{i=1}^{N} a_{ii} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

λ^0: $\sigma_N = (-1)^N (-\lambda_1)(-\lambda_2)(-\lambda_3) \cdots (-\lambda_N)$

$$\sigma_N = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_N = \det(A) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$A^K \longrightarrow \lambda^K$

$Ax = \lambda x$ $\quad A(Ax) = A(\lambda x)$ $\quad A^2 x = \lambda A x = \lambda^2 x \longrightarrow A^K x = \lambda^K x \quad \forall K \in \mathbb{N}$

SE $\det(A) \neq 0$ $\quad A^K x = \lambda^K x \quad K \in \mathbb{Z}$

RAGGIO SPETTRALE

$\rho(A) = \max_{i=1,\ldots,N} |\lambda_i|$ MASSIMO MODULO DEGLI AUTOVALORI

$\rho(A) \in \mathbb{R}_0^+$

TRASFORMAZIONE PER SIMILITUDINE

$B = S^{-1} A S \qquad \det(A), \det(S) \neq 0$

$\det(B) = \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1}) \det(A) \det(S) = \frac{1}{\det(S)} \det(A) \det(S)$

$\det(B) = \det(A)$

AUTOVALORI

$\det(B-\lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) = \det[S^{-1}(A-\lambda I)S]$

$= \det(S^{-1}) \det(A-\lambda I) \det(S)$

$\det(B-\lambda I) = \det(A-\lambda I) \longrightarrow$ STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO $\longrightarrow$ STESSI λ

TRASLAZIONE DELLO SPETTRO

$A - \alpha I = B \qquad : \qquad \det(B-\mu I) = 0$

$\lambda \qquad \mu$

$\det(A-\alpha I-\mu I) = \det(A-(\alpha+\mu)I) = \det(A-\lambda I) = 0$

DA CUI $\alpha+\mu = \lambda$

$A - \alpha I = B$

$\lambda - \alpha = \mu$

DIAGONALIZZABILITÀ

$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq N$

$\gamma(\lambda)$ MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI λ
N° DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI ASSOCIATI

$\alpha(\lambda)$ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI λ
N° DI VOLTE IN CUI λ APPARE

N DIMENSIONE DELLA MATRICE

SE $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \ \forall \lambda \longrightarrow A$ È DIAGONALIZZABILE

ALTRIMENTI È COMUNQUE JORDANIZZABILE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MATRICI HERMITIANE

$A = A^H = (\bar{A})^T \implies \lambda_i \in \mathbb{R} \ \forall i$

DIMOSTRAZIONE $Ax = \lambda x$ $\quad x^H A x = x^H \lambda x$ $\quad \lambda = \dfrac{x^H A x}{x^H x}$

$$\left.\begin{aligned} x^H x &= \bar{x} \cdot x = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \in \mathbb{R}^+ \\ x^H A x &= x^H A^H x = (x^H A x)^H \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \to \lambda \in \mathbb{R}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

NORME VETTORIALI

$f: \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}_0^+$

1. $\|x\| = 0 \iff x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\longrightarrow$

$$\begin{cases} \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2} = \sqrt{x^H x} \\ \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i| \end{cases}$$

$\|x\| \in \mathbb{R}^+$ SE $x \neq 0$

$\|x\| = 0$ SE $x = 0$

EQUIVALENZA FRA NORME $\quad \exists \alpha, \beta : \alpha \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \beta \|x\|_p$

DA CUI SE $\|x\|_p \to 0$ ALLORA $\|x\|_q \to 0$

NORME MATRICIALI

1. $\|A\| = 0 \iff A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

NORME INDOTTE (DA QUELLE VETTORIALI)

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^N / \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \longrightarrow \|A\| \|x\| \geq \|Ax\|$$

$$\begin{cases} \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| & \text{MODULO DELLA COLONNA DI VALORE MASSIMO} \\ \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} \\ \|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| & \text{MODULO DELLA RIGA DI VALORE MASSIMO} \end{cases}$$

EQUIVALENZA $\exists \alpha, \beta : \alpha \|A\|_p \leq \|A\|_q \leq \beta \|A\|_p$

COERENZA $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ CONDIZIONE DI COERENZA

DA CUI $\|A\|_p$ È COERENTE CON $\|x\|_p$

$A = A^H$ $\begin{cases} \|A\|_1 = \|A\|_\infty \\ \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^2)} = \rho(A) \end{cases}$

master copy COPISTERIA 050 8312126 388/9837745

TEOREMA DI HIRSH

$\rho(A) \leq \|A\|$

DIMOSTRAZIONE $Ax = \lambda x$ SCRIVO x COME $B = (x|0|\cdots|0) \in \mathbb{C}^{N \times N}$

$AB = \lambda B$ $\|AB\| = |\lambda| \|B\|$ $\|A\| \|B\| \geq |\lambda| \|B\|$

$\|A\| \geq |\lambda| \ \forall \lambda$ QUINDI $\|A\| \geq \rho(A)$

MATRICI CONVERGENTI

$\lim_{K \to +\infty} A^K = 0$

$\rho(A) < 1 \iff \lambda_i < 1 \ \forall i \rightarrow \lim_{K \to +\infty} \lambda_i^K = 0 \ \forall i$ CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE

$\|A\| < 1 \implies \rho(A) < 1 \rightarrow \lim_{K \to +\infty} \lambda_i^K = 0 \ \forall i$ CONDIZIONE SUFFICIENTE

$\det(A) < 1$ SE $\det(A) > 1 \rightarrow |\lambda_i| > 1$ PER ALMENO UNA i CONDIZIONE NECESSARIA

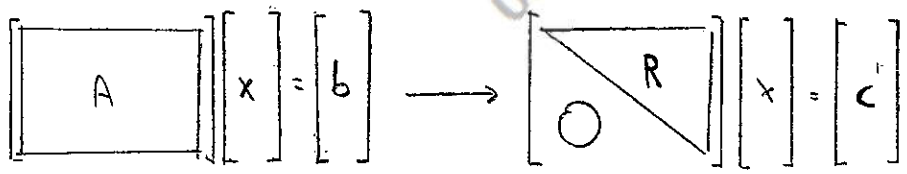
SISTEMI LINEARI $Ax = b$ $\det(A) \neq 0$

METODI DIRETTI

CRAMER

$x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$ $A_i = (\cdots | b | \cdots)$ (b in i-esima posizione) $i = 1, \ldots, N$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$

GAUSS



SISTEMA DI BANALE RISOLUZIONE

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745