-ANALISI MATEMATICA 2

Matteo Chimenti

RICHIAMI

1. Spaz. Vettoriali: $\mathbb{R}^2$ $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $v, w \in \mathbb{R}^2$ $v = (v_1, v_2)$ $w = (w_1, w_2)$

$\langle v, w \rangle = \underbrace{v_1 w_1 + v_2 w_2}_{\in \mathbb{R}} = \|v\| \|w\| \cos\theta$ ⚠ $\langle \cdot \rangle$ = scalare

$\langle , \rangle$ **bilineare**: vuol dire che è lineare nella variabile v e w

$\forall u, v, w \in \mathbb{R}$ $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

$\langle u, w+v \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u, v \rangle$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$

simmetrica: vuol dire che posso scambiare l'ordine dei fattori

$\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$

definito positivo: vuol dire che un numero $\langle u, u \rangle \geq 0$ e vale $= \Leftrightarrow u = 0$

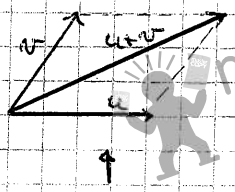
Un oggetto con queste tre proprietà è un prodotto scalare definito +

Si può definire un'altra applicazione: **la norma** $\| \| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Dato un prodotto scalare si definisce $\|v\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ cioè la lunghezza

PROPRIETÀ DI $\| \|$

1. $\|u\| \geq 0 = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ → disuguaglianza triangolare



Es: $\mathbb{R}^2$ $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$

standard → $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$

$\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$

Queste sono 3 norme nello spazio $\mathbb{R}^2$, VERIFICARE CHE SONO NORME

Si utilizzano in diversi contesti

Uno spazio normato è uno spazio con una norma

master COPY
master COPY
master COPY

Prendo un insieme X di $X \times X \to \mathbb{R}$ che sia:

a) $\forall u, v \in X \quad d(u,v) \geq 0$ e $=0$ se $u=v$ [def +]

b) " $d(u,v) = d(v,u)$ [simmetrico]

c) $\forall u, v, w \in X \quad d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ [triangolare]

Se ho $\mathbb{R}^2$, $\| \ \|$ $\to$ $d(u,v) = \|u - v\|$

Es: $\mathbb{R}$, d_0 $\quad d_0(u,v) = \begin{cases} 0 & u=v \\ 1 & u \neq v \end{cases}$ VERIFICA CHE SODDISFI LE PROPRIETÀ a, b, c

Tutti i concetti di analisi contengono una distanza quelle tre proprietà sono fondamentali

Abbiamo quindi 3 concetti:

d DISTANZA

$\| \ \|$ NORMA

$\langle , \rangle$ PRODOTTO SCALARE

C'è un'applicazione di queste proprietà:

$\mathbb{R}^d_{[0,1]}[x]$: insieme dei polinomi nella variabile x di grado d considerati come funzioni su $[0,1]$

Questo è uno spazio vettoriale, quindi posso prendere due polinomi nella variabile x

$p, q \in \mathbb{R}^d_{[0,1]}[x] \quad \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, dx$

Per le proprietà dell'integrale esso è bilineare;

È simmetrico perché la somma dentro l'integrale è simmetrico

ed è def + perché è tra 0 e 1

$\langle p, p \rangle = \int_0^1 p^2(x) \, dx \geq 0$ e $=0 \iff p = 0$

$C^0([a,b])$ C^0: funzioni continue $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$ prodotto scalare su $C^0[a,b]$

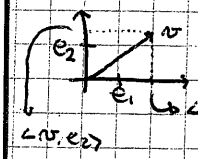
Con un insieme e un prodotto scalare posso trovare l'angolo fra due funzioni

Es $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}(nx)\right\}_n$ insieme ortonormale su $C^0[-\pi,\pi]$

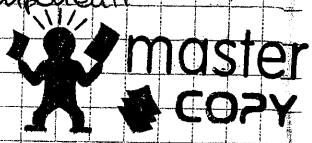
Es $\mathbb{R}^2$ $\|\cdot\|_1$ $\mathbb{R}^2$ $\|\cdot\|_\infty$ $\{x\in\mathbb{R}^2, \|x\|_1\le 1\}$ e $\{x\in\mathbb{R}^2, \|x\|_\infty\le 1\}$

vuol dire cerchio perché sono l'insieme dei punti alla stessa dist.

$(V,\langle\cdot\rangle)$ siccome ho questo ho una base ORTONORMALE $(e_1,\dots,e_n)$



$v = \underbrace{\langle v, e_1\rangle}_{\text{COEFFICIENTE DI FOURIER } \hat{v}_1} e_1 + \dots + \langle v, e_n\rangle e_n$ somma delle componenti



Sappiamo che • $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i\,\hat{w}_i$

$\therefore \|v\|^2 = \sum_i (\hat{v}_i)^2$

TRADUZIONE
$(V,\langle\cdot\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^n,\langle\cdot\rangle$ euclideo) di dim. n

$v \longrightarrow (\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_n)$

ISOMORFISMO ISOMETRICO

• Cioè il prodotto scalare fra due componenti vuol dire mettere in fila le componenti e farne la somma

Se ho un prodotto scalare provo a farmi una base ortonormale

↳ $C^0([-\pi,\pi]) = \{$funzioni $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ continue$\}$

Una base ortonormale di $C^0([-\pi,\pi])$, $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g\,dx$

è data da $\longrightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), n\in\mathbb{N}^+\right\}$

Se prendiamo f $\hat{f}_n^{\,s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\operatorname{sen}(nx)\,dx \in\mathbb{R}$

$\hat{f}_n^{\,c} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\cos(nx)\,dx \in\mathbb{R}$

Ad esempio posso decomporre un suono nelle sue componenti in coeff.

Questa è la base della Trasf. di Fourier discreta

Tutte le cose periodiche e il suono si basano su questo.

(X,d) spazio metrico, prendiamo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

è di Cauchy se $\forall\varepsilon\ \exists n_0$ t.c. se $n,m>n_0$ $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

(X,d) è completo se ogni successione di Cauchy converge, cioè

$\exists x_0$ tc $\forall\varepsilon\ \exists n_0$ $d(x_n,x_0)<\varepsilon$ $\forall n>n_0$

[è una successione dove da un certo punto in poi si avvicina ad un punto x_0]

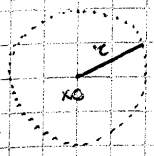
Ad esempio $(\mathbb{R}, d_{\text{euclideo}})$ è completo

$(\mathbb{Q}, d_{euc})$ π le espansioni decimali di π π non è razionale

È una successione di Cauchy perché tende a π ma non lo raggiunge

---

Def. INTORNO SFERICO $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tc } d(x_0, x) < r\}$

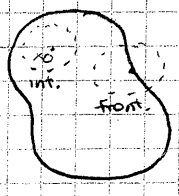


vuol dire i punti vicini ad x_0 a meno di r

Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ posso dire quando un punto x_0:

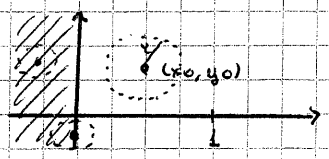
- x_0 interno ad E: $\exists\, r$ e $B(x_0, r) \subset E$
- x_0 esterno ad E se $\exists\, r$ tc $B(x_0, r) \subset E^c$ con $E^c = \mathbb{R}^n - E$ $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ e } x \notin E\}$
- x_0 è di frontiera se $\forall r$ $B(x_0, r)$ contiene sia punti di E sia punti di E^c

L'insieme dei punti di frontiera si indica con ∂E (= bordo di E)



ES $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$

$P = (x_0, y_0)$ $x_0 > 0 \Rightarrow P$ è interno se prendo $r = \frac{x_0}{2}$ $B(x_0, r) \subset E$



P con $x_0 < 0$ est. $P = (0, y_0)$ con $x_0 = 0$ di frontiera

E è **APERTO** se ogni suo punto è interno (ovvero non comprende la frontiera cioè $E \cap \partial E = \{\emptyset\}$)

E è **CHIUSO** se E^c è aperto (se $\partial E \subset E$)

ES1 $E = \{(x, y)\ x > 0\}$ è aperto

$F = \{(x, y)\ x \geq 0\}$ è chiuso [il suo complementare è E]

ES2 · $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ x^2 + y^2 < 1\}$ è APERTO

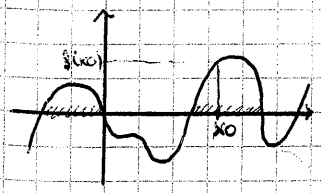
· $\mathbb{R}^n$ è APERTO , · $\{\emptyset\}$ è APERTO

· $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ 2x + 3y - 1 = 0\}$ è CHIUSO

· $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ y > 0\}$ né chiuso né aperto

Come si fa a riconoscere al volo un insieme chiuso o aperto?

ES3 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tc } f(x) > 0\}$ è APERTO $x_0 \in E$ $f(x_0) > 0$



Il teorema della permanenza del segno: $\exists \delta$ tc $|x_0 - x| < \delta$ $\Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x \in E$ e lo posso usare perché è continua

$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) < 0 \end{array}\right\}$ sono APERTI se f è CONTINUA

$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) \leq 0 \end{array}\right\}$ sono CHIUSI se f è CONTINUA