Prof Ghimenti

Libro di testo: Bramanti - Pagani - Salsa Analisi 2 (Nuova edizione)
Marcelli Sbordone,
Giusti (più rigoroso)
Terracini - Verzini.

Prodotti scalari, norma e distanza

Prodotto scalare

$\mathbb{R}^2$ (spazio vettoriale)

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$

$\langle v, w \rangle : \langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$ Prodotto scalare canonico (generalizzabile in altri spazi)

Proprietà

① è BILINEARE (in entrambe le variabili)

$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ idem per la seconda componente
$\langle \alpha u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle$

② è SIMMETRICO

$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

③ è DEFINITO POSITIVO

$\langle w, w \rangle \geq 0$ è $= 0 \iff w = 0$

Dimostrazione ①

$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

$(u_1 + v_1) w_1 + (u_2 + v_2) w_2 = u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2 =$

$(u_1 w_1 + u_2 w_2) + (v_1 w_1 + v_2 w_2) =$

$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ ☒

Dimostrazione ③

$\langle u, u \rangle = u_1^2 + u_2^2 \geq 0$ $\quad = 0 \iff u_1 = u_2 = 0 \iff u = 0$

Norma

Dato un prodotto scalare posso definire una NORMA $(\| \cdot \|)$

Def. V sp. vettoriale, una norma è $\| \| : V \to \mathbb{R}$ se:

a) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \quad$ e $= 0 \iff v = 0$
b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$
c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianze triangolare)

Se $\langle , \rangle$ è prodotto scalare $\Rightarrow$ definisco $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Esercizio: dim che $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ è veramente una norma.

Dimostrazione (b)

$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda \langle v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\|$

Esercizio: dim. che 1) $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$ con $\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|_1 \stackrel{\text{def}}{=} |x| + |y|$

2) $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$ con $\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|_\infty = \max \{ |x|, |y| \}$

3) $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_{euc})$ $\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|_{euc} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (viene da prodotto scalare)

sono spazi normati ($\| \|_1, \| \|_\infty, \| \|_{euc}$ sono norme)

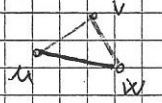
Distanza

Def. X insieme, d è DISTANZA se:

a) $X \times X \to \mathbb{R}$ t.c. $d(u,v) \geq 0$ e $=0 \iff v=u$ $\forall u,v \in X$

b) $d(u,v) = d(v,u)$ (simmetria)

c) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ (dis. triangolare)

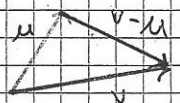


ESEMPIO:

$(\mathbb{R}, d)$ $\quad d(v,w) = \begin{cases} 0 \iff v=w \\ 1 \iff v \neq w \end{cases}$ (non per forza c'è prodotto scalare)

Se X sp. vettoriale e $\| \ \|$ è la sua norma definisco $d_{\| \ \|}(u,v) = \|u-v\|$

ES.



ES.* Dim che $d_{\| \ \|}$ è una distanza

a) $d(u,v) \overset{def}{=} \|u-v\|$ allora

$\|u-v\| \geq 0$ (norma è positiva) $\Rightarrow d(u,v) \geq 0$

è $=0$ se $u-v=0 \Rightarrow u=v \Rightarrow d(u,v)=0 \iff u=v$

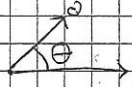
b) $d(u,v) = d(v,u)$

$d(u,v) = \|u-v\| = \|-(v-u)\| = |-1| \, \|v-u\| = \|v-u\| = d(v,u)$

Def. (X,d) è SPAZIO METRICO (ha la distanza)

RIASSUNTO
- d misura la distanza tra elementi
- $\| \ \|$ lunghezza di un vettore
- $\langle , \rangle$ serve a misurare gli angoli

$\langle a,b \rangle = \|a\| \, \|b\| \cos\theta$



Ovunque $\exists \langle , \rangle$ si può definire $\cos\theta \overset{def}{=} \dfrac{\langle a,b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$

$\langle , \rangle \to \| \cdot \| \to d$

$(V, \langle \cdot \rangle) \to (V, \| \cdot \|) \to (X, d)$ $\qquad \|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ $\qquad d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$

Esercizio:

1. $\mathbb{R}^d_{[0,1]}[x] = \{$ polinomi di grado $\leq d$ in x su $[0,1]\}$

$\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, dx$

2. $C^0[a,b]$ $\quad \int_a^b f,g$ è prodotto scalare $\quad$ prodotto scalare è 0 (sono ortogonali)

3. $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx), \ n \in \mathbb{N} \right\}$ è un insieme ORTONORMALE se $C^0([0,\pi])$
   ↳ se farò quella funzione con la stessa esce norma 1)

4. $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$ e $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$

$B_1 = \{ v \in \mathbb{R}^2, \ \|v\|_1 \leq 1 \}$

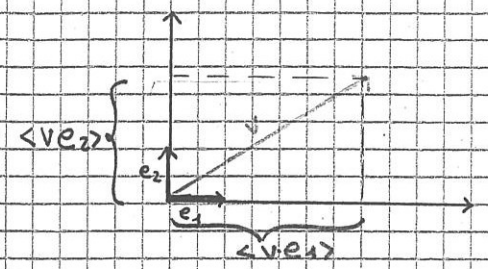
$B_\infty = \{ v \in \mathbb{R}^2, \ \|v\|_\infty \leq 1 \}$

master COPY

Sia $(V, \langle\cdot\rangle)$ s.p. vettoriale, sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale ovvero

$\langle e_i, e_j\rangle = 0 \quad i \neq j, \quad \langle e_i, e_i\rangle = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$

1) $\forall v \in V \quad v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$



$\langle v, e_1\rangle = \hat{v}_1$ coefficienti di Fourier

master COPY

2) $\forall v, w \in V \quad \langle v, w\rangle = \langle v, e_1\rangle \langle w, e_1\rangle + \cdots + \langle v, e_n\rangle \langle w, e_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i \hat{w}_i$

Dimostrazione

$v = \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i e_i \qquad w = \sum_{j=1}^{n} \hat{w}_j e_j$

$\langle v, w\rangle = \langle \sum_i \hat{v}_i e_i, \sum_j \hat{w}_j e_j\rangle =$

$= \sum_i \hat{v}_i \langle e_i, \sum_j \hat{w}_j e_j\rangle = \sum_{i,j} \hat{v}_i \hat{w}_j \langle e_i, e_j\rangle$

$= \sum_i \hat{v}_i \hat{w}_j$

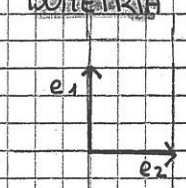
ma questa è una base ortonormale quindi per $i=j$ $\langle e_i, e_j\rangle = 1$

3) $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \sum_i \hat{v}_i^2$

Allora $(V, \langle\cdot\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \text{euclideo})$

$v \longrightarrow (\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_n)$

è ISOMETRIA $\Rightarrow \|v\|_V = \|(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)\|_{euc}$



master COPY

cioè a partire dallo spazio V si può costruire lo spazio vettoriale cartesiano (a partire dai due vettori ortonormali della base)

Esempio *: $V = C^0([-\pi, \pi]) \quad \langle , \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ BASE ORTONORMALE (non è finita) (V non ha dim finita)

data f, i coefficienti di Fourier sono:

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \quad x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad x \in \mathbb{R}$

L'inizio della teoria delle trasformate di Fourier

master COPY

master COPY

Proprietà metriche di $(\mathbb{R}^n, d)$

Def. (X,d) spazio metrico **COMPLETO**

Una $\langle x_n \rangle_n \subset X$ successione è detta **di CAUCHY** se $\forall \varepsilon \; \exists \; \overline{n}$ t.c. $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ se $m,n > \overline{n}$
(da un certo punto in poi due elementi a caso sono arbitrariamente vicini)

Uno spazio metrico è **completo** se <u>OGNI</u> successione di Cauchy converge

<u>TEORETA</u> $(\mathbb{R}^n, d_{euc})$ è metrico completo.

Esempio $(\mathbb{Q}, d_{euc})$ <u>NON</u> è completo (è bucato)

Dim π 3 3.1 3.14 3.141 3.1415 ... $q_n \in \mathbb{Q}$
q_1 q_2 q_3 q_4 q_5
$q_n \to \pi \notin \mathbb{Q}$

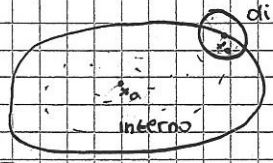
$(q_n)_n$ di cauchy (ese scelgo un $\varepsilon < \frac{1}{1000}$ è di Cauchy)

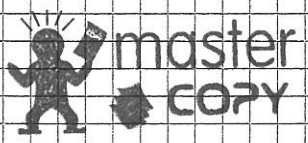
Def. Si definisce **intorno sferico di x_0** (di raggio R) $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < R\}$



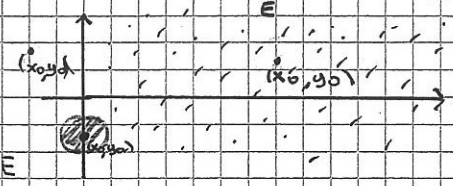
Def. Punto $x_0 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ è:

interno se $\exists$ intorno sferico $B(x_0, r) \subseteq E$
esterno se $\exists$ intorno sferico $B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n / E$
di frontiera se $\forall$ intorno sferico $B(x_0, r)$, $B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$ $B(x_0, r) \cap \mathbb{R}^n / E \neq \emptyset$
(∂E)





Esempio:
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; x > 0\}$



Ogni punto $P_0 = (x_0, y_0)$ $x_0 > 0$ è interno, scelgo $r \in \frac{x_0}{2}$ $B(x_0, r) \subset E$

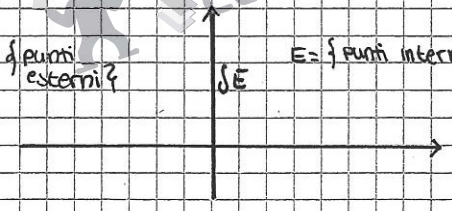
Ogni punto $P = (x_0, y_0)$ $x_0 < 0$ è ESTERNO ad E: se scelgo $r < \frac{|x_0|}{2}$ $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n / E$

Ogni punto $P = (0, y_0)$ è di frontiera

$\to$ {punti interni ad E} $= E$

$\to$ {punti esterni} $= \{(x_0 y_0), \; x_0 < 0\}$

$\to \partial E$ = {punti di frontiera} $= \{(0, y_0)\}$



Def. E è **APERTO** se ogni suo punto è interno
E è **CHIUSO** se il complementare è aperto

Esempio $E = \{(x,y), \; x > 0\}$ è aperto
$E = \{(x,y), \; x \geq 0\}$ è chiuso

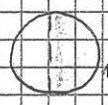
Def. (equivalente) Se E contiene tutto ∂E $(\partial E \subset E) \Rightarrow E$ è **CHIUSO**
Se E non contiene NESSUN punto di $\partial E \Rightarrow E$ è **APERTO**

Esempio: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;,\; x^2+y^2 < 1\}$ è aperto

$\Leftrightarrow$ cerchio che non comprende la sua circonferenza

$(\partial E = \{x^2+y^2 = 1\})$ → è la circonferenza

- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+3y-1 = 0\}$ $\quad F = \partial E$ $\quad = 0$ chiuso
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le 1,\ x > 0\}$ → non è né aperto né chiuso
- $\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$ SONO APERTI e CHIUSI



↳ non ha punti di frontiera

non ha nessun punto interno

Ogni famiglia di aperti (o chiusi) di $\mathbb{R}^n$ deve contenere sia $\emptyset$ che $\mathbb{R}^n$

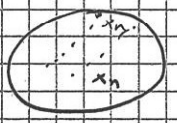
Proprietà degli aperti (di $\mathbb{R}^n$)

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sono aperti
- unione (anche numerabile) è aperta
- intersezione FINITA è aperta

Proprietà dei chiusi

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sono chiusi
- unione FINITA di chiusi è chiusa
- intersezione (anche numerabile) è chiusa

TEOREMA (senza dim.) I chiusi di $\mathbb{R}^n$ sono anche chiusi per successione ovvero se $\{x_n\} \subset C$, C chiuso e $x_n \to x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x_n \in C$



qualsiasi successione a pezzi in C non può uscire dalla frontiera

Esempio: $\mathbb{R}^n$ è chiuso per successioni
$\emptyset$ è chiuso per successioni

TEOREMA: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ è aperto idem $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$

↳ dim. con teo permanenza segno

analogamente $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \ge 0\}$ è chiuso
$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \le 0\}$ è chiuso
$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ è chiuso

} ↳ dim. (per complementari e per intersezione)

Dim. 1

$x_0 \in \{f(x) > 0\}$ per la permanenza del segno (vale $x \in \mathbb{R}$, f continua)

$\exists \delta$ t.c. $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $f(x) > 0 \Rightarrow x_0$ è interno $\Rightarrow \{f(x) > 0\}$ tutto di punti interni (abbiamo preso un generico punto)

DEF. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è LIMITATO se $\exists\ R > 0$ t.c. $E \subset B(0,R)$

DEF. E è COMPATTO: se $\forall$ successione $\{x_n\} \subset E$ $\exists$ sottosuccessione convergente in E ovvero se $\exists\ n_k$ famiglia di indici $n_k \nearrow \infty$ ($\Leftrightarrow$ è crescente) e $x_{n_k} \to x_0 \in E$

Esempio:

$x_n = (-1)^n = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$

$x_{2n} = \{1, 1, 1, 1\} \to 1$ (converge a 1) } sottosuccessioni convergenti

$x_{3n+1} = \{-1, -1, -1, \dots\} \to -1$

ma $x_n \not\to$ (x_n non converge)