Analisi Matematica II

prof. Ghimenti Marco

homepage: Marco.Ghimenti @ DMA.UNIPI.IT

ricevimento: Lunedì per appuntamento

libri: Analisi II Bonotello, Conti, Tennacini, Venzimi, Tennario

Sbordone, Marcellini Liguori

Giusti B.B

Bramanti, Pagani, Salsa Zanichelli

" , Pagani, Salsa Zanichelli nuova edizione

MASTER COPY

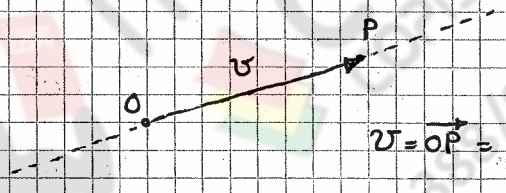
Tel. 388/9837745

- Geometria

Punti
rette
piano euclideo

$\mathbb{A}^1$ retta $\mathbb{A}^2$ piano $\mathbb{A}^3$ spazio

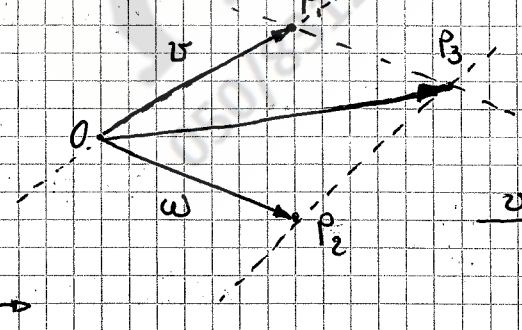
Preso nel piano $(\mathbb{A}^2)$ un punto di riferimento "O" ed un generico punto P



V_0^2 spazio vettoriale (insieme di vettori)

$v = \overrightarrow{OP} = P - O$ (modi di scrivere v)

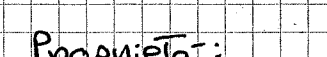
Somma tra vettori: regola del parallelogramma



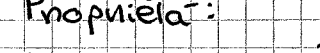
$\overrightarrow{OP_3} \overset{def}{=} v + w$

Questo metodo solo nel caso i vettori non coincidano.

se coincidenti vengono semplicemente sommati.



l'opposto:



Proprietà:

(1) $u, v, w \in V_0^2$ $(u+w)+v = u+(w+v)$

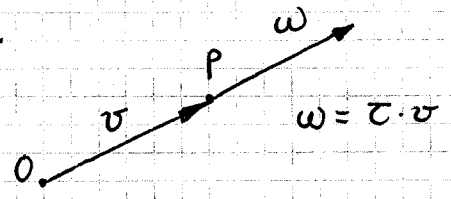
(2) $\overrightarrow{OO} + u = u + \overrightarrow{OO} = u$ $\overrightarrow{OO} = 0$

(3) $\forall v \; \exists w$ $u + w = w + u = 0$ $w = -v$

(4) $u + w = w + u \quad \forall u, w$

prodotto tra vettore e scalare

$v \in V_0^2 \quad \tau \cdot v \quad \tau \in \mathbb{R}$



MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Proprietà

(1) $a \in \mathbb{R} \quad w, v \in V_0^2 \quad a(v+w) = av + aw$

(2) $a, b \in \mathbb{R} \quad v \in V_0^2 \quad (a+b)v = av + bv$

(3) $(ab)v = a(vb)$

(4) $1v = v \qquad 0v = \vec{OO} \qquad (-1)v = -v$

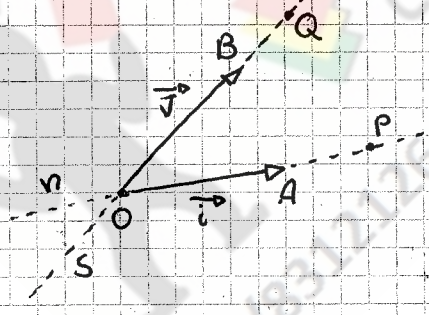
N.B.

$(V, +, -) \qquad + : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

Se valgono i punti dall'(1) all'(8), si tratta di uno spazio vettoriale

$(V, +, -)$ spazio vettoriale se valgono i punti dall'(1) all'(8).

Se prendo "O" come punto di riferimento



$\vec{i}$ e $\vec{j}$ indipendenti linearmente.

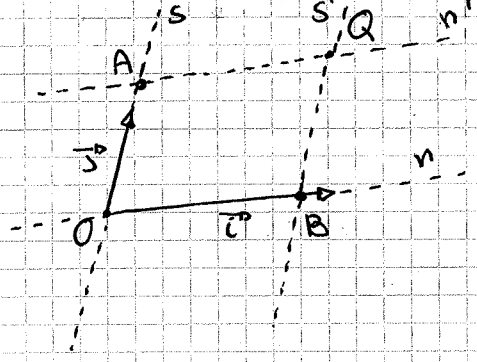
$\forall P \in r \quad \exists a \in \mathbb{R}$

$\vec{OP} = a\vec{OA} = a\vec{i}$

$\forall Q \in s \quad \exists b \in \mathbb{R}$

$\vec{OQ} = b\vec{OB} = b\vec{j}$

Se ora come prima prendo "O" come punto di riferimento e un punto qualsiasi Q



$\vec{OQ} = v_1 + v_2 = a\vec{i} + b\vec{j}$

$\forall \vec{OQ} \in V_0^2 \quad \exists! \ (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\vec{OQ} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$a\vec{i} = \vec{OB}$

$b\vec{j} = \vec{OA}$

$\vec{OQ} = \vec{OB} + \vec{OA}$

In questo modo ho determinato le coordinate, che quindi vengono descritte tramite la moltiplicazione tra uno scalare ed un versore

Teorema:

Per Def $\{i, j\}$ $\vec{i}$ e $\vec{j}$ non paralleli, indipendenti linearmente.

$\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono base di V_O^2

$B = \{i, j\}$ base di V_O^2

$\Phi_B : V_O^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{def}{=} \mathbb{R}^2 \Rightarrow \Phi_B$ è biettiva

$v = a\,i\,b\,j \longrightarrow (a, b)$

$\mathcal{A}^2 \longrightarrow V_O^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

punti vette coordinate

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

• Prodotto scalare

Si indica con $\langle \cdot, \cdot \rangle$; se prendo 2 vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: il prodotto scalare si indica così:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{def}{=} x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Se ho:

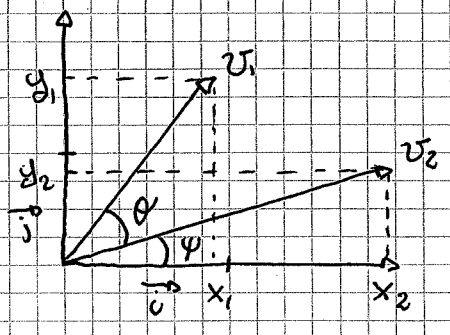
$v_1, v_2 \in V_O^2$ $\quad \langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$

$v_1 = (x_1, y_1)$ $\quad v_2 = (x_2, y_2)$

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ con $\|\cdot\|$ si intende "norma"

$\|\cdot\| ; V_O^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

Se v_1 e v_2 formano un angolo fra loro:



$v_1 = (x_1 ; y_2)$

$v_2 = (x_2 ; y_2)$

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

$x_2 = \|v_2\| \cos\varphi$ $\quad \|v_1\|$ norma di v_1

$y_2 = \|v_2\| \sin\varphi$ $\quad \|v_2\|$ norma di v_2

$x_1 = \|v_1\| \cos(\theta + \varphi)$

$y_1 = \|v_1\| \sin(\theta + \varphi)$

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{\|v_1\|} = \cos\theta\,\frac{x_2}{\|v_2\|} - \sin\theta\,\frac{y_2}{\|v_2\|} = \cos(\theta+\varphi) \\ \frac{y_1}{\|v_1\|} = \sin\theta\,\frac{x_2}{\|v_2\|} + \cos\theta\,\frac{y_2}{\|v_2\|} = \sin(\theta+\varphi) \end{cases}$$

Ricavo $\sin\theta$:

$$\sin\theta = \cos\theta\,\frac{x_2}{\|v_2\| y_2} - \frac{x_1}{\|v_1\| y_2}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Sostituendo ottengo:

$$\frac{y_1}{\|v_1\|} = \frac{\cos\theta\, x_2^2}{\|v_2\| y_2} - \frac{x_1 x_2}{\|v_1\| y_2} + \frac{\cos\theta\, y_2^2}{\|v_1\| y_1}$$

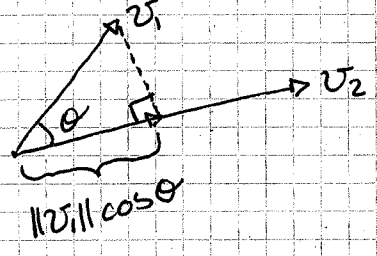
$$\frac{y_1 y_2}{\|v_1\|} + \frac{x_1 x_2}{\|v_1\|} = \frac{\cos\theta\,(x_2^2 + y_2^2)}{\|v_2\|}$$

$$\frac{y_1 y_2 + x_1 x_2}{\|v_1\|} = \frac{\cos\theta\,\|v_2\|^2}{\|v_2\|}$$

$$\frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|} = \cos\theta\,\|v_2\| \Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\,\|v_2\|}$$

Da qui si ottiene che: $\langle v_1, v_2\rangle = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos\theta$

Da qui deriva il fatto che due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare fa 0.



Abbiamo preso una funzione che va dallo spazio vettoriale a $\mathbb{R}$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V_O^2 \times V_O^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto \langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Proprietà:

(1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in V_O^2$

(2) $a \in \mathbb{R} \quad u, v, w \in V_O^2$

$\langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle = \langle u, av \rangle$

$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

(3) definito positivo

$\forall v \in V_O^2 \quad (v, v) \geq 0 \quad$ e $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Se vale il punto (3)

$\| \cdot \| : V_O^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\| v \| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

$d(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \| u - v \|$

$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad u - v = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

$$d(u, v) = \| u - v \| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(P_1, P_2)$$

Proprietà fondamentali della distanza:

(1) $d(u, v) \geq 0 \Rightarrow \iff u = v$

(2) $d(u, v) = d(v, u) \qquad d(u, v) = \| u - v \|$

(3) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Teorema:

V spazio vettoriale
$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$
simmetria, bilineare, def. > 0
$\| v \| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

$\Big\}$ $(V, \| \cdot \|)$ spazio metrico (normato)
metrico indica che può definire la distanza tra due punti

es. $(\mathcal{C}[-\pi, \pi], \mathbb{R}) \qquad \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx$

$$d(f, g) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f - g)^2}$$