MASTER COPY
Tel. 388/9837745

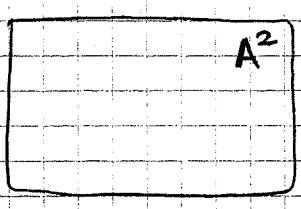
RICHIAMI DI ALGEBRA

A^1 retta

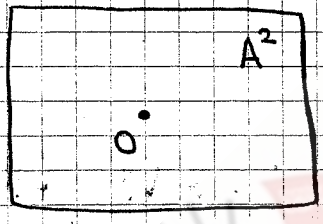
A^2 piano

A^3 spazio

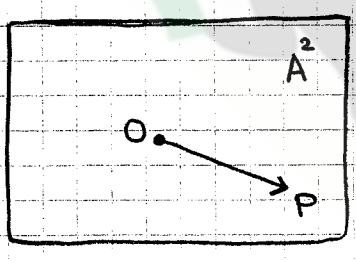
PIANO GEOMETRICO



Fisso un punto O per avere un punto di riferimento



Se $P \in A^2$, definisco un vettore $v = \overrightarrow{OP} = P - O$, che è il segmento che unisce O e P orientato verso P



$\overrightarrow{OP}$ è il vettore applicato in O

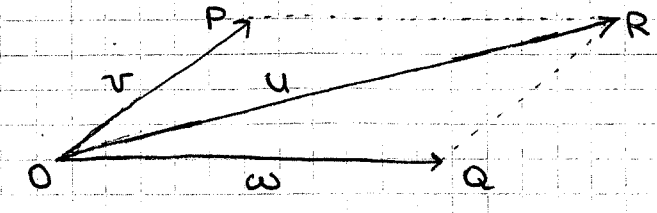
L'insieme di tutti i vettori applicati in O lo chiamo V_0^2, o semplicemente V^2, tralasciando il punto di applicazione.

$$\{\text{vettori applicati in } O\} = V_0^2 = V^2$$

Prima operazione di cui è dotato lo spazio vettoriale:

SOMMA TRA VETTORI

Dati $v, w \in V_0^2$, trovo un terzo vettore $u \in V_0^2$ dove $u = w + v$



Regola del parallelogramma

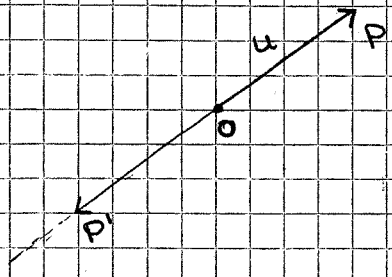
PROPRIETÀ DELLA SOMMA

(i) Proprietà associativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$

(ii) Esiste uno zero $\vec{OO} = \mathbb{O}$,

ed ha le proprietà dello zero: $u+0 = 0+u = u$

(iii) Esiste l'opposto: $\forall u \in V_0^2 \quad \exists w \text{ t.c. } u+w = w+u = 0$

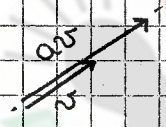


MASTER COPY

Tel. 388/9837745

(iv) Proprietà commutativa: $v+w = w+v$

PRODOTTO DI UN VETTORE PER UN NUMERO REALE



$v \in V_0^2$

$a \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ

(v) Proprietà distributiva: $a(v+w) = av + aw$

(vi) Proprietà distributiva: $(a+b)v = av + bv$

(vii) Proprietà associativa del prodotto: $(ab)v = a(bv)$

(viii) $0v = 0$

$1v = v$

$-1v = -v$

-1 significa l'OPPOSTO di v

$(V^2, +)$ è uno SPAZIO VETTORIALE REALE

↓ (perché la moltiplicazione per uno scalare l'abbiamo presa reale.)

$\mathbb{R}^2$ numeri reali sono uno spazio vettoriale reale.

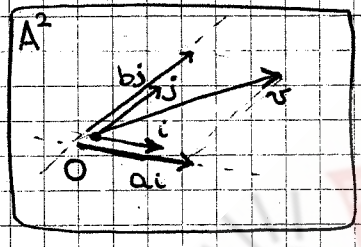
Esempi

FASTCOPY
Tel. 050/556414

$$\mathbb{R}^d[x] = \left\{ \begin{array}{l} \text{polinomi di grado } d \\ \text{a coeffic. in } \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{C}^0[a,b] = \left\{ \begin{array}{l} \text{funzioni continue} \\ \text{su } [a,b] \end{array} \right\}$$

Riprendiamo il piano A^2:

① 

$$v = ai + bj$$

$$\forall v \; \exists! \; (a,b) \text{ t.c. } \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

② $$(\mathbb{R}^2, +) = \left\{ (x,y) \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sono coppie di numeri reali}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ay_1 \end{pmatrix}$$

⇓

C'è una relazione tra ① e ②, perché a ogni passo prendere un vettore v e mandarlo nella coppia a, b:

$$V_O^2 \to \mathbb{R}^2$$

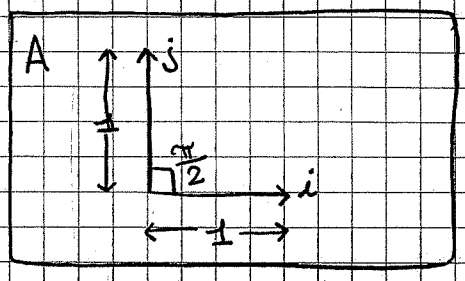
$$v = ai + bj \to (a,b)$$

→ BIIEZIONE

→ nel linguaggio degli spazi vettoriali è un ISOMORFISMO

Passo ora a definire la struttura di

PRODOTTO SCALARE



⇒ Abbiamo scelto le basi a cui faremo riferimento

PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \qquad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

è un'applicazione che prende 2 vettori di $\mathbb{R}^2$ e ne dà un numero.

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

OVVERO

$$(x_1 \;\; y_1) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Questa applicazione ha

3 PROPRIETÀ

- è BILINEARE ⇒ es.: $\to \langle v+w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$
  $\to \langle av, w \rangle = a \langle v, w \rangle$

  ↓ cioè lineare nella prima e nella seconda componente

- è SIMMETRICO, cioè $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

- è DEFINITO POSITIVO, cioè

$$v \in \mathbb{R}^2 \qquad \langle v, v \rangle \geq 0$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = (0,0)$$

↓

⇓

Ci permette di introdurre il concetto di

NORMA :

$v \in \mathbb{R}^2 \qquad \|v\| \overset{def.}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle}$

(Es.)

$$v = (x, y) = \sqrt{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

DEFINIAMO IL PRODOTTO SCALARE DI 2 VETTORI GEOMETRICI

$V^2 \qquad \langle \cdot , \cdot \rangle_e \qquad \mathbb{R}^2 \qquad \langle \cdot , \cdot \rangle_c$

$\langle v, w \rangle_e \qquad v \to (x_1, y_1)$

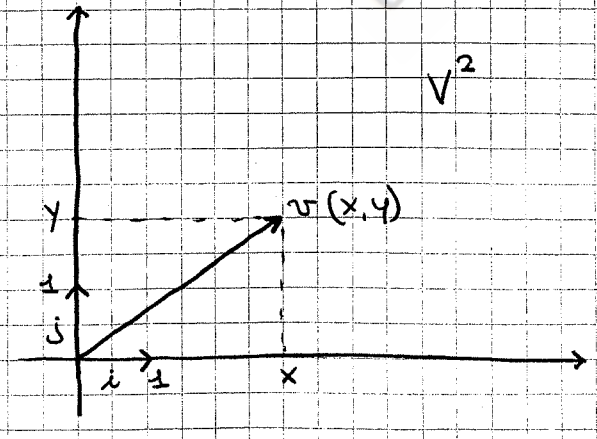
$V^2 \to \mathbb{R}^2$

$w \to (x_2, y_2)$

$$\langle v, w \rangle_e \overset{def.}{=} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_c$$

($\langle v, w \rangle_e$: $v, w \in V^2$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$)

$$\|v\|_e = \sqrt{\langle v, v \rangle_e} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$



V^2

$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Con questa scelta di basi $|v| = \|v\|$