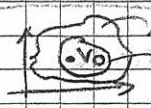
TEORIA

INSIEMISTICA

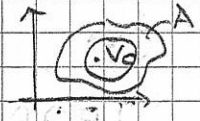


pallina

- $A \subseteq \mathbb{R}^m$ $x_0 \in A$

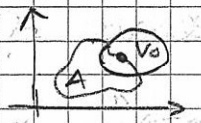
  A si dice intorno di x_0 se contiene una pallina centrata in x_0

- A si dice aperto se è intorno di ogni suo pto

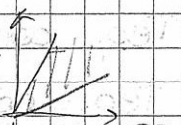


- A si dice chiuso se A^c è aperto

- x_0 appartiene al bordo di A se ogni pallina di x_0 interseca A e A^c



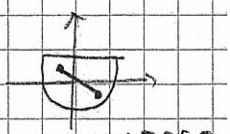
- Un insieme è aperto se non ha bordo
- Un insieme è chiuso se contiene tutto il suo bordo
- Non tutti gli insiemi sono aperti o chiusi
- A è limitato se esiste una palla in cui è contenuto


NON LIMITATO


LIMITATO

- Se A è chiuso e limitato si dice compatto
- A connesso → se è fatto da un'unico pezzo
- A convesso → si va da un pto dell'altro lungo un segmento senza uscire da A


NON CONVESSO


CONVESSO

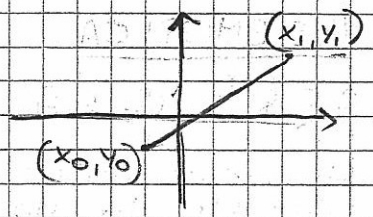
- A convesso ⟹ A connesso

TEOREMA ESISTENZA DEGLI ZERI

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuo

$f(x_0, y_0) < 0$ e $f(x_1, y_1) > 0$

Allora $\exists\ (\bar{x}, \bar{y})$ t.c. $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$



TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f: A \to \mathbb{R}$ A è compatto ed f è continuo,

Allora $\exists \max_A f$ e $\min_A f$

"NOTA" inf e sup esistono sempre

Se esistono max e min allora coincidono con sup e inf.

LIMITI IN (0,0) IN $\mathbb{R}^2$ $(x,y) \to (0,0)$

- Vale Teo. confronto
- Vale Teo. carabinieri
- Vale che $f(x,y) \to 0 \iff |f(x,y)| \to 0$
- Se si trovano due curve su cui il limite è diverso, allora il limite $\nexists$
- coordinate polari

master copy

LIMITI A $+\infty$

- Teo. confronto
- Teo. carabinieri
- coordinate polari
- se si trovano due curve su cui il limite è diverso, allora il limite $\nexists$
- cambio variabile, paraggiamento degli esponenti

LIMITI A $+\infty$ SUI DOMINI

- se c'è un limite su un dominio c'è in tutti i domini più piccoli ed è lo stesso
- può succedere che su un dominio grande non ci sia il limite ma ci sia su quelli più piccoli
- Se $D = D_1 \cup ___ \cup D_m$ (N° limito)

  se in ognuno dei D_r esiste il limite all'infinito ed assume sempre lo stesso valore ℓ allora il limite esiste in D e vale ℓ

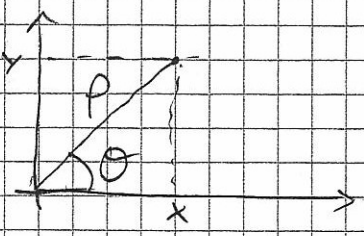
master COPY

COORDINATE POLARI

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$



COORDINATE SFERICHE

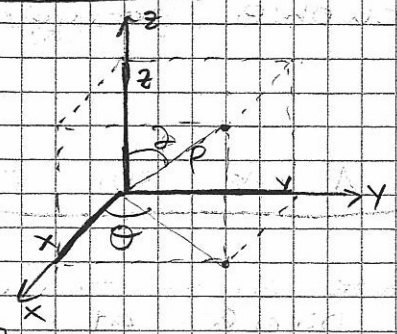
$x = \rho \cos\theta \sin\vartheta$

$y = \rho \sin\theta \sin\vartheta$

$z = \rho \cos\vartheta$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta \in [0, 2\pi] \quad \vartheta \in [0, \pi]$



COORDINATE CILINDRICHE RISPETTO ASSE z

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$

$z = z$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta \in [0, 2\pi]$

COME VEDERE SE UN INSIEME È LIMITATO?

$A = \{(x,y) : f(x,y) \leq a\}$ Se $A = \emptyset \Rightarrow$ non posso dire altro

$\Rightarrow$ probabilmente è illimitato

* $A = \{(x,y) : f(x,y) = a\}$

$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$ se $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) \neq$ illimitato (vedere curve)

$\Rightarrow \exists$ una palla B_0 t.c. fuori da B_0 f è $> a$

$A \subseteq B_0 \Rightarrow A$ è limitato

* se trovo che su due curve uno va a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$ se invece trovo una curva $\subseteq A$ che va a ∞

$\Rightarrow A$ illimitato perché contiene una curva che va a ∞

* $\Rightarrow A$ illimitato

(una curva $\in A$ se risolve è eq $f(x,y) \leq a$)

TEOREMA DI WEIERSTRASS GENERALIZZATO (WG)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua "vale anche se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$" (illimitato)

$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f = +\infty$ $-\infty$

$\Rightarrow \exists \min_{\mathbb{R}^2} f$ $\exists \max_{\mathbb{R}^2} f$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua

$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ esiste almeno uno tra $\max_{\mathbb{R}^2} f$ e $\min_{\mathbb{R}^2} f$

In particolare:

- se f assume valori più grandi di $\ell \Rightarrow \exists \max_{\mathbb{R}^2} f$
- se f assume valori più piccoli di $\ell \Rightarrow \exists \min_{\mathbb{R}^2} f$