RICHIAMI

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- $\mathbb{R}^m$ = spazio vettoriale a m componenti $\in a\ \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

attenzione a non fare confusione con la scrittura formale di $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Si lavora in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Ci sono cose vere in una variabile ma non in più variabili.

- norma:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2}$$ → la norma fa quello che fa il valore assoluto in una variabile

- Prodotto Scalare

$$v, w \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \langle v, w \rangle = v \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_m w_m$$

proprietà: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Se $v \parallel w \Rightarrow \langle v, w \rangle = \pm \|v\| \cdot \|w\|$
Se $v \perp w \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$$\Downarrow$$

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\vartheta$$

$$\langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

- Distanza $d(v, w) = \|w - v\|$ → distanza sostituisce quello che era l'intervallo in Analisi I

→ Intorno di $v_0 = B_{v_0, R} = \{ v \in \mathbb{R}^m : \|v - v_0\| < R \}$

$$\Downarrow$$

In $\mathbb{R}^2$ è una palla centrata nel punto

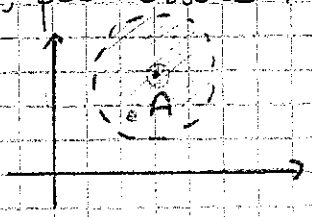
"Gli intorni di un punto sono le palline centrate nel punto"

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

INSIEME

Un insieme ha varie caratteristiche, può essere:

- **APERTO** = ∃ una pallina ∈ Insieme
  $\forall v_0 \in A \ \exists B_{v_0,R} \subseteq A$



⇒ A è aperto se non ha pezzi di confine

(Posso sempre uscire dove voglio)

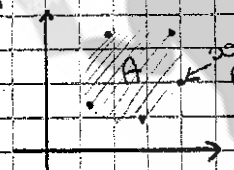
- **CHIUSO** = Se A^c è aperto
  ↳ A complementare → ciò che ∈ a $\mathbb{R}^n$ ma non da in A

Contiene tutto il suo confine

- **BORDO DI A** = Punti che non stanno in A e neppure in A^c

(Riflette il comune concetto di confine)

Se il bordo non è continuo A non è né aperto né chiuso



⇒ v_0 è INTERNO ad A se c'è una pallina centrata in v_0 tutta ⊆ in A

⇒ A aperto = tutti i punti sono interni

bordo di A (∂A) sono i punti che non sono interni ad A e ad A^c

- **LIMITATO** = Sta una porzione di spazio limitato

⇒ Se $\exists B_R : A \subseteq B_R$

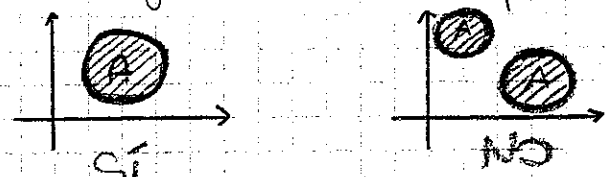
centro è l'origine se non è specificato

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

· COMPATTO = È chiuso e limitato

· CONVESSO = Se è fatto da un solo pezzo



SÍ NO

Per muovermi in tutto A non devo per forza uscire da A

· CONVESSO = Se posso andare da un punto all'altro in linea retta, stando in A...

⇓

Se dati due punti $P_1, P_2 \in A$, Il segmento che unisce P_1P_2 sta in A



SÍ NO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FUNZIONI

Ce ne sono di due tipi

· REALI di più variabili = $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (o su un sottinsieme)

es $f(x,y) = x + y^3$

$f(x,y,z) = xy - z^2$ → z non compare ma è sempre un $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x + y - z^4$

· VETTORIALI di più variabili = $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

hanno come immagine un vettore

es $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x^2 \cdot y \\ x \end{pmatrix}$ → Le componenti di $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, reali, si indicano con F_1, F_2, F_3] → funzioni di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

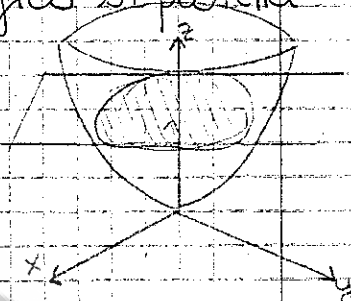
$z = f(x,y) \xrightarrow{es} z = x^2 + y^2$

NB] Grafico di una funzione di $\mathbb{R}^2$ (in x,y) è in $\mathbb{R}^3$ (ora su x,y,z)

Im è sempre una dim superiore a quella di partenza

LINEE DI LIVELLO = È la curva, o insieme di curve derivanti dal tagliare la funzione con un piano // a X ($\perp$ a z).

Si fissa $z=L$ e l'intersezione col grafico si proietta sul piano xy.



Per trovarle: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \right\}$

es $x^2 + y^2 = L$

sono circo.

sono i punti mandati a $z=L$ dalla funzione

Se uso $z \leq L$ trovo delle zone chiamate sottolivelli

www.unicopy.it 050/831215 388/1083715

LIMITI

Def: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l \quad (\pm\infty)$

Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|x,y\| \le \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| \le \varepsilon$ $\quad (x,y \neq 0,0)$

$(\forall M > 0) \qquad (f(x,y) \gtrless M)$

Tutti i teoremi su somma e prodotto dei limiti in una variabile continuano a funzionare anche in più variabili.
Valgono anora:

- Confronto
- Carabinieri
- $f(x,y) \to 0 \iff \|f(x,y)\| \to 0$
- $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f\binom{x}{y} = l \iff \forall$ curva $\gamma(r) = \binom{x(r)}{y(r)}$:

$$\lim_{r\to 0} \binom{x(r)}{y(r)} = \binom{0}{0}$$

si ha che $f\binom{x(r)}{y(r)} = l$

→ Non si usa per dimostrare l'esistenza del limite ma per vedere che NON ESISTE

basta trovare due curve su cui il limite è diverso

Esercizi:

- $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y^2}$ non ha limite per $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$

All'origine ci posso andare con 20 curve

Uso $\gamma_1 = \binom{0}{r} \Rightarrow f\binom{0}{r} = \dfrac{0}{0+r} = 0$ $\Rightarrow \nexists$ limite

$\gamma_2 = \binom{r}{0} \Rightarrow f\binom{r}{0} = \dfrac{r}{r+0} = +\infty$