25/09/2017

Ripasso

$\mathbb{R}^n$: spazio vettoriale di dimensione n => spazio formato da vettori a n componenti $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Norma di un vettore : $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|$

Prodotto scalare :

$v, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (v, w) = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$ (prodotto scalare euclideo)

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$

↓ vale l'uguaglianza se v e w sono paralleli (perché $\theta = 0/180°$)

$\langle v, w \rangle = 0 \iff$ sono ortogonali (perché $\theta = 90°$)

$\langle v, v \rangle = \|v\|^2$

$d(v, w) = \|v - w\|$

Intorno di un punto v_0 → $B_{v_0, R} = \{ v \in \mathbb{R}^n : \|v - v_0\| \leq R \}$

In due variabili → $B_{(x_0, y_0), R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2 \}$

=> gli intorni di un punto sono le palline centrate nel punto!

Definizioni:

1_ Aperto → se $\forall v_0 \in A$ esiste $B_{v_0, R} \subseteq A$ (contenuta)

2_ Chiuso → se A^c è aperto => A è chiuso se contiene il BORDO

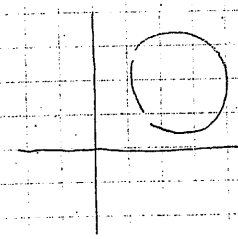
3_ Limitato → A è limitato se $\exists$ una B_R (palla di centro l'origine) in cui è contenuto => tutte le variabili

4_ Compatto: sono limitate

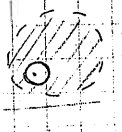
5_ Connesso } * A è compatto se è chiuso + limitato

6_ Convesso }

7_ Bordi di un insieme



Questo insieme non è né aperto né chiuso → Non è aperto perché ho un pezzo di contorno, non è chiuso perché in alcuni "pezzi" manca il contorno!



A è aperto se non ha "pezzi di contorno"

BORDO

↓

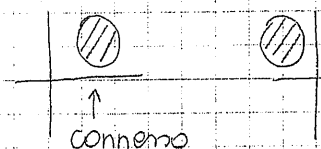
punti che non sono interni ad A e neppure a A^c

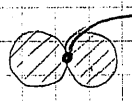
v_0 è INTERNO ad A (insieme) se c'è una pallina centrata in v_0 che è interamente contenuta in A

=> A è aperto se TUTTI i punti sono interni. Il BORDO di A (∂A) è l'insieme dei punti che non sono interni ad A e al suo complementare

MASTER COPY
Tel. 050 831216
Cell. 388 9837745

* Connesso → A è connesso se è fatto da un solo pezzo

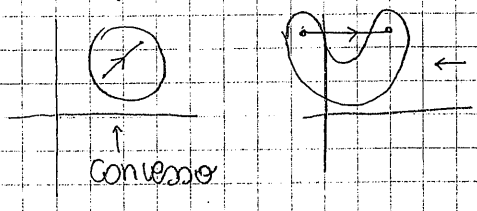




se questo punto è interno all'insieme allora posso fare questo "giro da" per andare dall'altro parte => È connesso!

=> Per andare da una parte all'altra non devo uscire dall'insieme

Convesso → A è convesso se dati due punti in A il segmento che unisce i due punti è tutto in A se uno in linea retta



MASTER COPY
Tel. 050 8312126

FUNZIONI

↳ Reali di più variabili $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es: $f(x,y) = x - y^3$ ← funzione reale di due variabili

↳ Vettoriali di più variabili $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es: $F(x,y) = (x-y, x^2y, x)$ ← Si chiama funzione vettoriale perché la sua immagine è un VETTORE

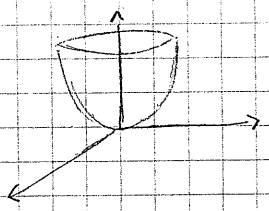
COMPONENTI di F (funzioni reali)

Il grafico di una funzione di $\mathbb{R}^2$ è in $\mathbb{R}^3$!! (Solo se la funzione è REALE)

MASTER COPY
050/8312126 Tel. 335 345

26/09/17

Se ho una funzione a due variabili il grafico si rappresenta in $\mathbb{R}^3$ => $z = f(x,y)$

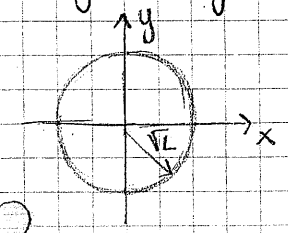


Ad esempio $z = x^2 + y^2$

LINEE di LIVELLO

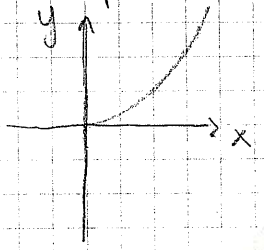
Si fissa $z = L$ → proietto le intersezioni con il grafico nel piano xy

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\{(x,y) : f(x,y) = L\}$ => $x^2 + y^2 = L$ è una circonferenza!



Le linee di livello si rappresentano SEMPRE in $\mathbb{R}^2$

Esempio



$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ => la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ diventa $f = t^2 + t^4$

⇓

se $t = 1$ siamo al 2° livello

se $t = 2$ siamo al 20° livello

LIMITI

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c $\|(x,y)\| \leq \delta$ => $|f(x,y) - \ell| \leq \varepsilon$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$ se $\forall M > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c $\|(x,y)\| \leq \delta$ => $f(x,y) \geq M$

- Continuano a valere:

1_ I teoremi sulla somma, prodotto, rapporto

2_ I teoremi del confronto e dei carabinieri

3_ $f(x,y) \to 0$ => $|f(x,y)| \to 0$

In una variabile:

$\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ <=> $\forall x_n$ t.c $x_n \to 0$ allora si ha che $f(x_n) \to \ell$

In due variabili:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$ <=> per ogni curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ t.c

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

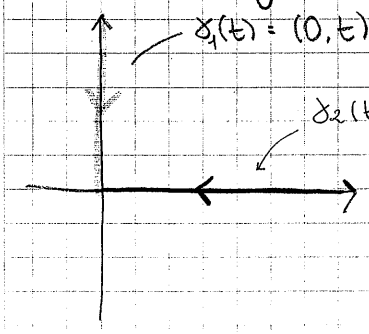
$\lim_{t \to t_0} \lim (x(t), y(t)) = (0,0)$ si ha $f(x(t), y(t)) \to \ell$

↑

Questa serve per dimostrare che NON esiste un limite in quanto per dimostrare che non esiste un limite si prendono due curve su cui il limite è diverso

Esempio:

$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ← voglio dimostrare che non ho limite per $(x,y) \to (0,0)$



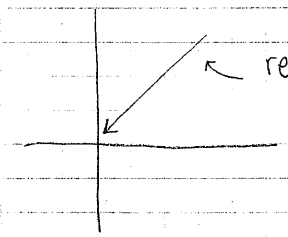
$f(0,t) = 0$ quindi il $\lim_{t \to 0} = 0$ (perché viene $\frac{0}{0+t^2}$?

$f(t,0) = \frac{t}{t^2} \longrightarrow +\infty$ se $t \to 0^+$

Ho trovato 2 limiti diversi => il limite ∄

Esempio

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$



$f(x,y) = \frac{x^2}{2x^2} \to \frac{1}{2}$ se $x \to 0$

$\begin{cases} f(0,t) = \to 0 \\ f(t,0) \to 0 \end{cases}$ ho trovato 2 limiti diversi

Esempio

$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ => $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ ①

$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ => $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ ②

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Prendendo gli assi trovo che se esiste il limite questo è 0

Per capire se esiste devo fare delle STIME → devo mettere il

○ modulo

① $0 \leq \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \to 0$ se $x \to 0$ quindi ① $\to 0$

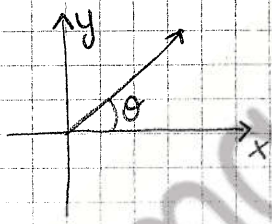
② Se esiste il limite è 0 (ci si mette sugli assi)

Prendo $y = \sqrt{x}$

$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ quindi il limite ∄

COORDINATE POLARI

○ $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$



$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Dire che $(x,y) \to (0,0)$ è come dire che $\rho \to 0$ (in quanto ρ è la distanza dall'origine)

L'esempio di prima in coordinate polari diventa:

○ $\lim_{\substack{\rho\to 0 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} \frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta\sin^2\theta = 0$

↳ è limitato

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ → in coordinate polari diventa

$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^4\theta} =$

$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2\sin^4\theta}$

Se $\theta \neq 0$ allora il numeratore $\to 0$ e il denominatore è $\neq 0$ quindi il limite è 0 Se $\theta = 0$ il num. è 0 ⇒ il limite è zero

○ ⇒ il limite esiste ed è zero

↳ Tuttavia prima abbiamo verificato che per questa funzione NON aveva limite

master copy COPISTERIA 050/831126 388/9637745
MASTER COPY Tel. 050 831226 Cell. 388 9637745