Analisi II

APPUNTI

COPISTERIA
050/83121126 388/98377745

SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ o equivalentemente $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Operazioni e notazioni

- **somma**: dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

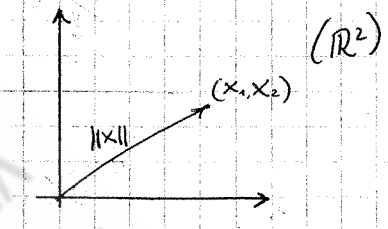
- **prodotto per scalare**: dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

- **Norma** di un vettore: dato $x \in \mathbb{R}^n$, la norma $\|x\|$ (o anche $|x|$) è

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

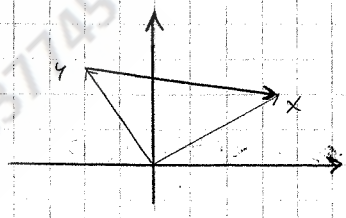
esso è un numero reale e geometricamente rappresenta la distanza dall'origine, cioè la lunghezza del vettore.



- **Distanza fra vettori**: dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\text{dist}(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

Osservazione: la distanza fra x e y non è altro che la norma del vettore differenza $y - x$ (o $x - y$)



- **Prodotto scalare**: dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, si definisce

$$x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Osservazione: $x \cdot x = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2$

Interpretazione geometrica: $x \cdot y = \|x\| \, \|y\| \cdot \cos\theta$, θ angolo compreso

Dim

$(\lambda x) \cdot (\mu y) = (\lambda\mu)\, x \cdot y$

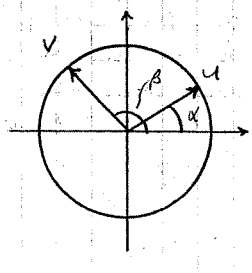
dati i vettori x e y (non nulli), posso definirne i rispettivi VERSORI (vettori unitari)

$$\vec{u} = \frac{x}{\|x\|} \qquad \vec{v} = \frac{y}{\|y\|}$$

$$x \cdot y = (u\|x\|) \cdot (v\|y\|) = \|x\| \, \|y\| \cdot u \cdot v$$

non rimane che dimostrare che $u \cdot v = \cos\theta$

Usando l'esempio di $\mathbb{R}^2$, posso considerare i versori come raggi della circonferenza unitaria



$u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ l'angolo compreso è $\theta = \beta - \alpha$

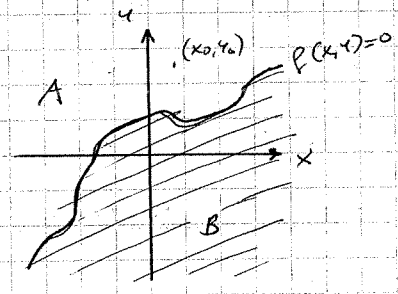
$v = (\cos\beta, \sin\beta)$

$$u \cdot v = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\theta \quad \square$$

INSIEMI DEL PIANO

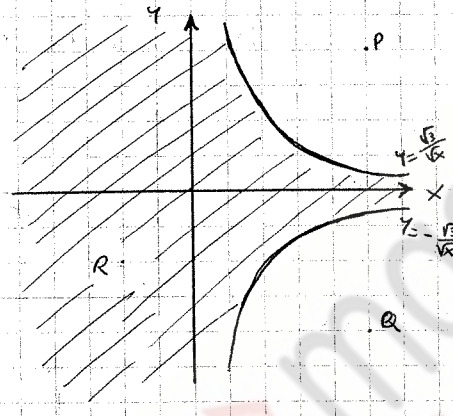
Per identificare insiemi nel piano si usano funzioni di due variabili del tipo $f(x,y) \leq 0$. Il "$\leq$" (o "$\geq$") sta a indicare che la parte "buona" sta nel semipiano in cui la f assume valori negativi (o positivi)

$f(x,y) \leq 0$



Se f è continua, è più facile identificare la zona buona. Ad esempio se $f(x_0,y_0)>0$ allora tutta la zona A è ≥ 0

es.: $xy^2 \leq 3$



per disegnare il grafico studio l'uguaglianza

$xy^2=3 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$, $x>0$

poi verifico dove è negativa

es. $P(5,4) \rightarrow 5\cdot 16 \leq 3$ NO $\rightarrow \oplus$

$Q(5,-4) \rightarrow 5\cdot 16 \leq 3$ NO $\rightarrow \oplus$

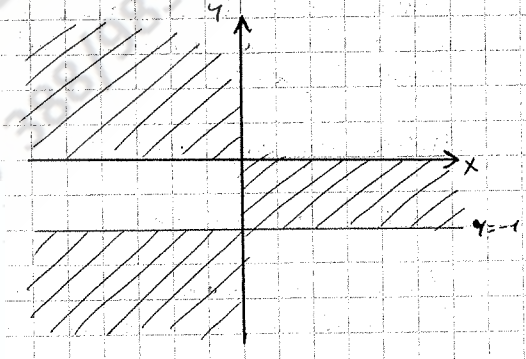
$R(-2,-2) \rightarrow -2\cdot 4 \leq 3$ SÌ $\rightarrow \ominus$

es.: $x(y^2+y) \leq 0$

prodotto negativo $\Rightarrow$ fattori discordi

I. $x \leq 0 \wedge y^2+y \geq 0 \iff x \leq$

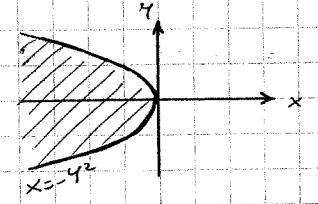
II. $x \geq 0 \wedge y^2+y \leq 0 \iff x \geq$



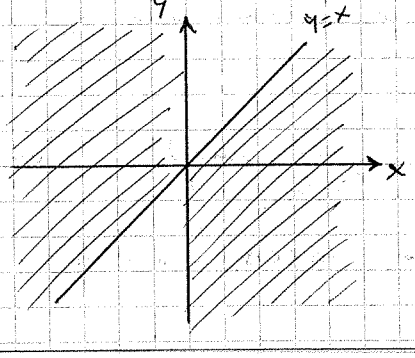
es.: $x+y^2 \leq 0$

studio prima $x+y^2=0$:

verifico $(-1,0) \rightarrow -1 \leq 0$ S



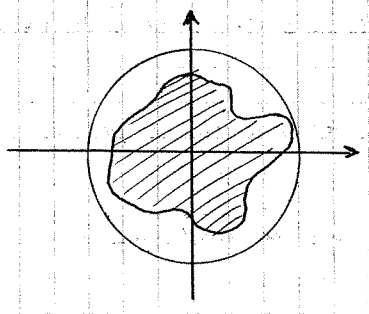
es.: $\frac{y}{x} \leq 1$



Qui il cambio di segno si ha non solo quando si arriva al valore per cui $f(x,y)=1$, ma anche quando la funzione non è più definita cioè lungo la retta $x=0$ (asse y)

Definizione (1)

Un insieme D si dice LIMITATO in $\mathbb{R}^2$ se è contenuto dentro un cerchio di centro O



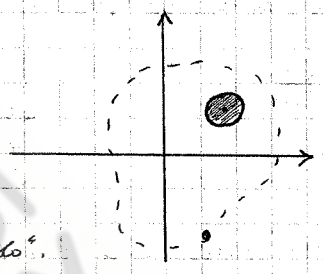
In generale, in $\mathbb{R}^n$, un insieme D è limitato se è contenuto in un insieme

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$$

Definizione (2)

Un insieme D si dice APERTO se

$$\forall x \in D \ \exists B_R(x) : B_R(x) \subseteq D$$



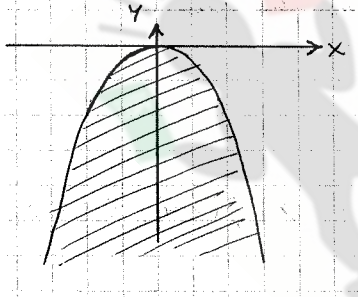
In pratica non deve contenere nessun "pezzo di bordo".
Se contiene l'intero bordo si dice CHIUSO

Definizione (3)

Un insieme D chiuso e limitato viene chiamato COMPATTO

es.: $x^2 + y \leq 0$; dire se è chiuso, aperto, limitato o no.

$y = -x^2$



questo insieme è chiuso (contiene il suo bordo) e non limitato (non è contenuto in nessun cerchio di centro O)

es.: $\frac{x}{y} \geq 1$

$y = x$

non è limitato e non è né chiuso né aperto ($y=x$ fa parte dell'insieme, $y=0$ non fa parte dell'insieme)

