Analisi matematica 2 Marina Ghisi ghisi@dm.unipi.it

FUNZIONI REALI

def funzione in più variabili: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

def CURVA DI LIVELLO: curva ottenuta in $\mathbb{R}^3$ dall'intersezione della superficie con la traslazione del piano $(x,y)$

def CONTINUITÀ in $\mathbb{R}^2$: $f$ è continua in $x_0$ se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ in $\mathbb{R}$

in $\mathbb{R}^n$ $f$ è continua in $x_0$ se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

in una variabile vale il teo DEGLI ZERI, in più variabili:

teo $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, se $f(x_0,y_0) < 0$ e $f(x_1,y_1) > 0$

$\Rightarrow$ $f$ si annulla in infiniti punti

teo tutti i teoremi sulle funzioni continue continuano ad essere validi in 2 variabili.

sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ottengo

$f(x,0) \Rightarrow$ mi muovo su $x$
$f(x,1) \Rightarrow$ mi muovo su $(x-1)$
$f(x,x^2) \Rightarrow$ mi muovo su una parabola

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

## 1 LIMITI

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

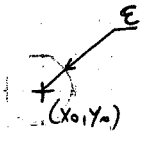
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ def: se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \|x - x_0\| \le \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, $x \neq x_0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ def se $\forall M > 0 \ \exists \delta : \|x - x_0\| \le \delta \Rightarrow f(x) \ge M$

Continuano a valere in due variabili:

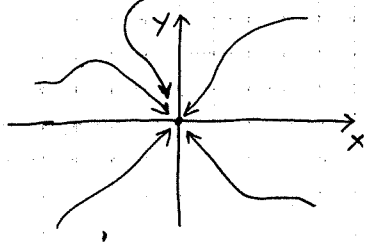
(1) TEOREMI ALGEBRICI
(2) PERMANENZA DEL SEGNO
(3) 2 CARABINIERI
(4) CONFRONTO

Gli intorni in due variabili sono circonferenze di centro $(x_0,y_0)$ e raggio "$\varepsilon$".




Intorno di $x_0$ di ampiezza "$\varepsilon$"

I limiti in $\mathbb{R}^2$ "tendono a $\nexists$" poiché definito un punto, in due variabili posso individuare $\infty$ modi per giungervi:



**Teo 1** $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff$ ∀ curva che tende al punto, il limite, su quella curva, è "l".

Questo teo è utilizzato per dimostrare che il limite ∄ trovando due percorsi lungo i quali il limite è diverso.

esempio:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ PROVO A MUOVERMI VERSO (0,0) SEGUENDO PARTICOLARI CURVE

asse y: $f(0,y) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ $\Rightarrow l \nexists$

asse x: $f(x,0) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0} f(x,0) = +\infty$

MASTER COPY

· Tel. 388/9837745

(2) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

La funzione sugli assi ha lim = 0 $\Rightarrow$ se ∃ il limite dovrà essere 0.

$f(x,0) = 0 \wedge f(0,y) = 0$

$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ il "lim" ∄

Ho dimostrato che il limite non esiste individuando un percorso lungo il quale il limite non è 0.

(3) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ $f(x,0) = f(0,y) = 0$

controllo l'andamento sulla GENERICA RETTA DI EQUAZIONE $y = ax$

$f(x,ax) = \frac{xa^2x^2}{x^2+a^4x^4}$, se $x \to 0 \Rightarrow f(x,ax) \to 0$

Concludo che sulle rette, il limite è 0. Provo a muovermi sulla parabola di equazione:

$x = y^2 \Rightarrow f(y^2,y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$ per $y \to 0$

$\Rightarrow \lim \nexists$

(4) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^4}$

Per risolvere il (4) introduco il seguente:

**teo 2**

$$f(x,y) \to 0 \iff |f(x,y)| \to 0$$

alle luce di queste considerazioni studio $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$. Se prendo $f(x,0)$ ottengo che $\lim f(x,y) = 0$. Quindi il limite se $\exists$ deve necessariamente essere 0.

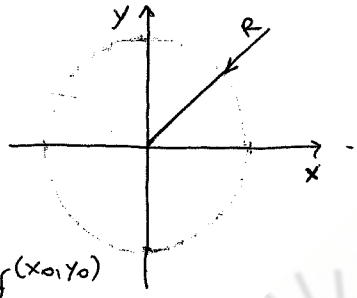
$$0 \le |f(x,y)| \le \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \quad \text{per } y \to 0 \quad \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \sim \left(\frac{x^2|y|}{x^2}\right) \to 0$$

in questo caso il limite $\exists$.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

## 1.2 LIMITI ALL'INFINITO

Andare all'infinito in più dimensioni equivale ad allontanarsi da un intorno dell'origine.




$B_\delta(x_0,y_0)$

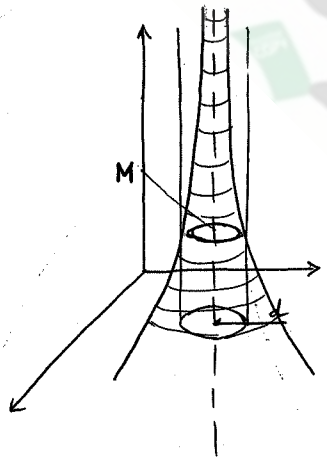
PALLA DI CENTRO IL PUNTO $(x_0,y_0)$

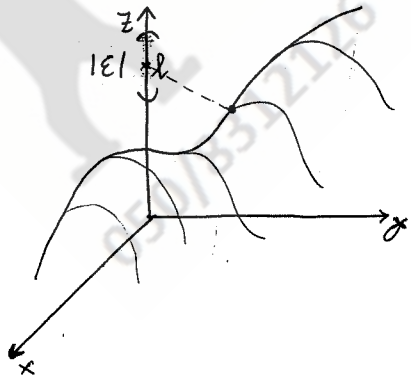
Dalla def (1): $\lim_{x^2+y^2 \to 0} f(x,y) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 : x^2 + y^2 \ge R \Rightarrow |f(x,y) - l| \le \varepsilon$$

(2) $\lim f(x,y) = +\infty$ se

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : f(x,y) \ge \varepsilon \ \forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{x_0,y_0\}$$




esempio

(1) $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2 y^2$

mi metto sugli assi: $f(x,0) = 0$

$f(x,x) = x^4 \to +\infty$ quando $x^2 \to +\infty$

$\to$ il limite $\nexists$

(2) $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^2+y$ il limite non $\nexists$ palesemente, voglio tuttavia dimostrarlo trovando due percorsi lungo i quali il limite assume valore differente.

$f(x,0) = x^2 \to +\infty$

$f(0,y) = y$ che non ha limite per $y^2 \to +\infty$ poiché se $y^2 \to +\infty \not\Rightarrow y \to +\infty$ infatti y può tendere liberamente a $-\infty$. ad esempio lungo il percorso $f(x,y) = f(x, -2x^2) \to -\infty$ al limite.

N.B Solo alla prova di aver trovato un percorso lungo il quale il limite è diverso posso esordire dicendo che il limite $\nexists$.

(3) $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^2+y^2-x$ $\exists$ il limite?

L'idea è quella di provare che per $(x^2+y^2)\to+\infty$, l'$(x^2)$ renderà trascurabile un eventuale effetto a $-\infty$ di $x$.

MINORO ~~MAGGIORO~~ L'ESPRESSIONE $x^2-x$ NEL TENTATIVO DI RENDERLA EQUIVALENTE AD UNA FORMA DELLA QUALE È NOTO L'ANDAMENTO PER $x^2+y^2\to+\infty$.

$x^2 - x \geq \frac{1}{2}x^2 - 2$

$\frac{1}{2}x^2 - x + 2 \geq 0$

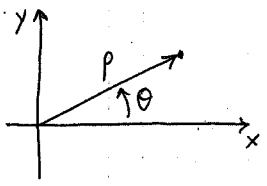
$x^2+y^2-x \geq \frac{1}{2}x^2 - 2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2 \to +\infty$

$(x^2+y^2)\to+\infty$

Ho ~~maggiorato~~ minorato la funzione con qualcosa che tende a $+\infty$

$\Rightarrow$ La funzione stessa tenderà allora a $+\infty$

## COORDINATE POLARI




Un modo per descrivere la posizione di un punto nel piano cartesiano è quello di definire la sua distanza dall'origine "$\rho$" e l'angolo che questo vettore forme col semiasse positivo delle x: "$\theta$".

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \geq 0 \ \wedge \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Dire $x^2+y^2 \to +\infty$ è equivalente ad enunciare che $\rho^2 \to +\infty$; ma questa limitazione, non impedisce a "$\theta$" di fare "quel che gli pare".

N.B Se nella soluzione imponessi $\theta = cost$ implicherebbe a fare i limiti sulle rette, avendo di fatto imposto una direzione.

esempio

(1) $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^2+y^2-x = \lim_{\rho\to+\infty} \rho^2 - \rho\cos\theta = \lim_{\rho\to+\infty} \rho^2\left(1 - \underbrace{\frac{1}{\rho}\cos\theta}_{\to 0}\right) = +\infty$

poiché $\cos\theta$ è limitato

(2) $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^2+y$ provo a risolvere in coordinate polari:

$$x^2+y \longrightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho\sin\theta \quad \text{con } \rho^2 \to +\infty$$

NON POSSO CONCLUDERE CHE IL LIMITE DÀ $+\infty$ PERCHÉ $\rho^2$ "BATTE" $\rho$;

→ posso solo dire che il limite $\nexists$.

(3) $\lim_{(x^2+y^2)\to+\infty} x^4 + |y| - xy$ provo in coordinate polari

$$\rho^4\cos^4\theta + \rho|\sin\theta| - \rho^2\sin\theta\cos\theta$$

N.B. Il ragionamento: " Se $\cos\theta \neq 0$ vince $\rho^4$ e se $\cos\theta = 0$ ... ← SBAGLIATO

Questo ragionamento equivale a fare limiti sulle rette

Come dimostro l'esistenza del lim? Nella funzione, al limite il termine che potrebbe dare problemi è: $-xy$ perché potrebbe condurre la funzione a $-\infty$.

$f(x,0) = x^4$ che per $x^2 \to +\infty \Rightarrow x^4 \to +\infty$. Scegliendo $y = 2x^3$ ottengo: $x^4 + 2|x|^3 - 2x^4 = -x^4 + 2|x|^3 \to -\infty$ per $x \to -\infty$.

Per compromettere l'andamento sarebbe bastato qualunque grado