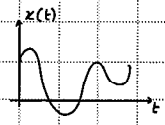
Concetti introduttivi

Il SEGNALE esiste come portatore di un informazione che ne giustifica l'esistenza. Il modo più conveniente per studiarlo è rappresentarlo come una funzione matematica la cui variabile indipendente sarà, salvo diverse indicazioni il tempo. La funzione $x(t)$ che rappresenta il segnale ha come unità di misura il volt [V]. Si avrà inoltre una classificazione del segnale in base ai valori assunti dalle variabili dipendenti ($x(t) \rightarrow$ ampiezza) e indipendenti ($t \rightarrow$ tempo):

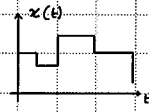
(i) Tempo ed ampiezza continui (ANALOGICO)



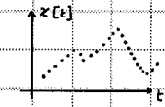
(ii) Tempo ed ampiezza discreti (DIGITALE)



(iii) Tempo continuo ed ampiezza discreta (QUANTIZZATO)



(iv) Tempo discreto ed ampiezza continua



Nella classificazione appena fatta si è data per scontato la possibilità di determinare a priori l'espressione analitica $x(t)$ e perciò la conoscenza di passato, presente e futuro del segnale. I segnali di questo tipo si dicono DETERMINATI. Nel caso non si conosca il futuro del segnale (ad esempio in una telecronaca), si parla di segnale ALEATORIO. Tutta via di questi non si può dire molto, perciò considereremo d'ora in poi solamente segnali determinati, che potranno essere PERIODICI ($\exists\, T \in \mathbb{R} : x(t) = x(t+T)\ \forall t \in \mathbb{R}$) o meno.
Cominciamo quindi elencandone le proprietà fondamentali:

(i) ENERGIA

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad (x^2(t) \rightarrow \text{POTENZA NORMALIZZATA})$$

Tutti segnali fisici sono AD ENERGIA FINITA ($E_x < +\infty$). Tuttavia spesso si fanno approssimazioni con segnali ideali che non presentano $E_x < +\infty$. Ad esempio $\forall x(t)$ periodico, $E_x = +\infty$. Risulta perciò spesso conveniente usare la proprietà che segue.

(ii) POTENZA MEDIA

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \qquad \text{N.B. Se } E_x < +\infty \Rightarrow P_x = 0$$

che per un segnale periodico con periodo T_0 diventa:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

(iii) VALOR MEDIO

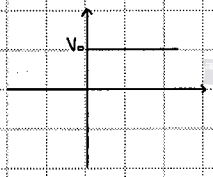
$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$$

che per un segnale periodico con periodo T_0 diventa:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\,dt$$

Elenchiamo ora alcuni segnali che ci saranno particolarmente utili:

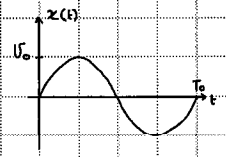
(i) SEGNALE GRADINO (accensione generatore DC)



$$x(t) = \begin{cases} V_0 & t>0 \\ V_0/2 & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad E_x = +\infty,\ P_x = \frac{V_0^2}{2},\ x_m = \frac{V_0}{2}$$

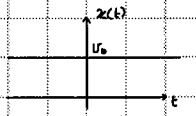
Ponendo $V_0 = 1\,V$ si ottiene il GRADINO UNITARIO $u(t)$

(ii) SEGNALE SINUSOIDALE (corrente AC)



$x(t) = V_0 \sin(2\pi \frac{t}{T_0})$ $\quad E_x = +\infty,\ P_x = \frac{V_0^2}{2},\ x_m = 0$ $\quad T_0 \to$ periodo $\quad f_0 = \frac{1}{T_0} \to$ FREQUENZA

(iii) SEGNALE COSTANTE



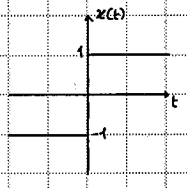
$x(t) = V_0$ $\quad E_x = +\infty,\ P_x = V_0^2,\ x_m = V_0$

(iv) IMPULSO RETTANGOLARE



$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t|<T/2 \\ 1/2 & |t|=T/2 \\ 0 & |t|>T/2 \end{cases} \qquad E_x = T,\ P_x = 0,\ x_m = 0$$

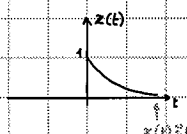
(v) FUNZIONE SEGNO



$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases} \qquad E_x = 0,\ P_x = 0,\ x_m = 0$$

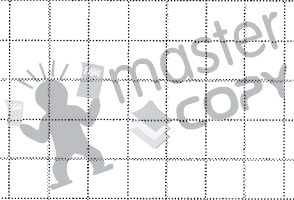
$= \frac{t}{|t|}$ per $t \neq 0$

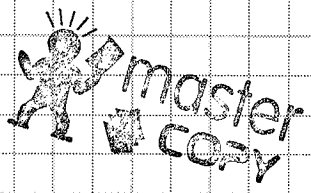
(vi) ESPONENZIALE UNILATERO (scarica condensatore)

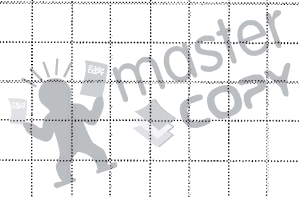


$x(t) = e^{-t/T} \cdot u(t)$ $\quad E_x = \frac{T}{2},\ P_x = 0,\ x_m = 0$

$x(t) \geq 0$ per $t < 4.6T$


master
copy


master
copy


master
copy

Sviluppo in serie di Fourier

Fu Fourier il primo ad accorgersi che qualunque segnale periodico può essere scritto come combinazione di segnali sinusoidali, tramite la relazione:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(2\pi k \frac{t}{T_0} + \theta_k\right) \quad \text{con } A_k \geq 0 \quad \forall k \geq 1$$

(fase)

Si noti che possiamo scrivere tutto in funzione della FREQUENZA FONDAMENTALE $f_0 = \frac{1}{T_0}$, ottenendo:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k) \quad \text{con } (kf_0) \rightarrow \text{K-ESIMA FREQUENZA ARMONICA}$$

Tale relazione prende il nome di FORMULA DI SINTESI IN FORMA TRIGONOMETRICA. Da essa è possibile ricavare l'AMPIEZZA (A_k) e la Fase (θ_k) che determinano il contributo della K-esima frequenza armonica, così da poter analizzare il segnale, come vedremo più avanti.

Di particolare interesse pratico è la FORMULA DI SINTESI IN FORMA ESPONENZIALE:

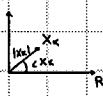
$$x(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}_{(a)} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} X_k e^{2\pi k f_0 t}$$

di fatto equivalente alla precedente, ma molto più comoda nei calcoli. I vari X_k sono detti COEFFICIENTI DI FOURIER, ricavabili dalla Formula:

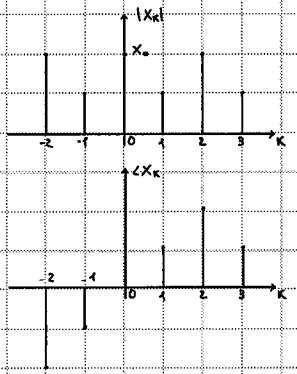
$$X_k = \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}_{(b)} \qquad \text{N.B. } X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = x_m$$

Da essi è comunque possibile ricavare ampiezza e Fase della K-esima armonica, infatti:

$$X_k = A_k e^{j\theta} \Rightarrow A_k = |X_k| \text{ e } \theta_k = \angle X_k$$



La relazione (a) è una formula di SINTESI che permette, una volta noti i contributi in fase ed ampiezza della K-esima armonica, di ricostruire il segnale originale. La (b) è invece un'equazione di ANALISI, in quanto permette di stabilire quali sono i contributi delle K-esime armoniche. L'obiettivo è infatti scomporre il segnale, così da poter rappresentare ampiezza e fase della K-esima armonica, ottenendo i cosiddetti spettri di AMPIEZZA (sopra) e FASE (sotto) del segnale. Particolarmente utile è il primo dei due che permette di vedere quali sono le frequenze dominanti (con ampiezza maggiore) del segnale.



N.B. Allontanandosi dalle armoniche ad ampiezza maggiore, lo spettro di ampiezza presenterà andamento decrescente. Se così non fosse, avremmo infinite armoniche con contributo significativo al segnale che presenterà, quindi, ampiezza infinita.

Lo spettro del segnale riflette anche particolari simmetrie di quest'ultimo, infatti:

- se $x(t)$ è pari ($x(t) = x(-t)$) $\Rightarrow X_k = X_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- se $x(t)$ è dispari ($x(t) = -x(-t)$) $\Rightarrow X_k = -X_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{R}$

ricordando che in generale, per i segnali reali:

$$X_k = \overset{\text{coniugato}}{X_{-k}^*} \Rightarrow \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| \rightarrow \text{spettro delle ampiezze ha simmetria pari} \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \rightarrow \text{spettro delle fasi ha simmetria dispari} \end{cases}$$

Vediamo quindi il terzo modo per scrivere l'equazione di sintesi, ovvero la FORMULA DI SINTESI IN FORMA RETTANGOLARE:

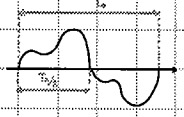
$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi f_0 t) - b_k \sin(2\pi f_0 t))$$

derivante dal fatto che $e^{j2\pi k f_0 t} = \cos(2\pi k f_0 t) + j\sin(2\pi k f_0 t)$. In tal caso avremo:

- $x(t) = x(-t) \Rightarrow b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- $x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Altra simmetria abbastanza frequente è quella dei segnali ALTERNATIVI, per cui vale:

$x(t \pm \frac{T_0}{2}) = -x(t)$ ← i due semiperiodi sono uguali ed opposti:

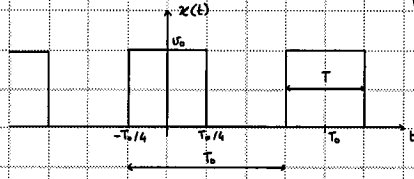


e presentano coefficienti nulli per armoniche pari:

$X_k = 0 \quad \forall k$ pari.

<u>esempio</u>

Consideriamo il TRENO DI IMPULSI RETTANGOLARI, ottenuto periodicizzando l'impulso rettangolare. È facile dimostrare che la sua Formula analitica è:



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} U_0 \,\mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

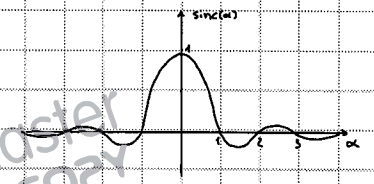
la cui forma è caratterizzata dal DUTY CICLE $= \frac{T}{T_0} < 1$.

Notiamo che $x(t)$ è pari, quindi ci aspettiamo che $X_k = X_{-k}$. Calcoliamo quindi i coefficienti:

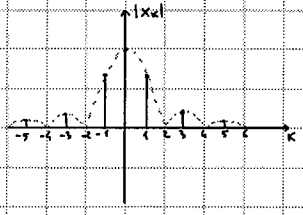
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{U_0}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{j2\pi f_0 t}\right]_{-T_0/4}^{T_0/4} = U_0\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k} \quad \text{per } k \neq 0$$

che possiamo scrivere in forma più sintetica tramite il SENO CARDINALE $\mathrm{sinc}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} & \alpha \neq 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$, ottenendo:

$$X_k = \frac{U_0}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$



e ricordando che $X_0 = x_m = \frac{U_0}{2}$.



Vediamo come le frequenze di contributo siano comprese nella prima "campana" ($k = 0, 1$).



■

Nel calcolo della serie di Fourier abbiamo dato per scontata l'esistenza e la convergenza della serie di Fourier (SF) del segnale. Tuttavia, dato un segnale $x(t)$, non è sempre vero che la SF associata converga ad essa. Occorre perciò trovare un criterio per capire quando è possibile calcolare la SF. Un aiuto significativo ci è dato dal CRITERIO DI DIRICHLET, che fissa condizioni sufficienti (ma non necessarie) per la convergenza della SF di un segnale. Una volta verificate tali condizioni, non molto restrittive, possiamo dare per certa la convergenza della SF del nostro segnale. In caso contr