LIBRO: "Teoria dei segnali" M. Luise, G. M. Vitetta, Mc Graw Hill
E-learning: tdsaero2017
www.tlc.ing.unipi.it/tds-aero
Esame orale su: - Teoria
- utilizzo software

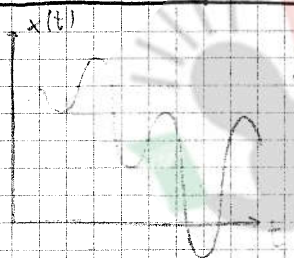
filippo.giannetti@iet.unipi.it

I) Segnali determinati: desunti da espressione analitica, grafica, tabella.
- Periodici;
- Non periodici.

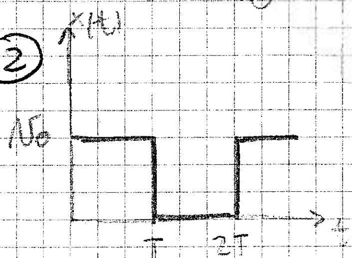
II) Segnali aleatori

SEGNALE: funzione $x(t)$ misurata in Volt [V]. La funzione è il codominio mentre il tempo è il dominio.

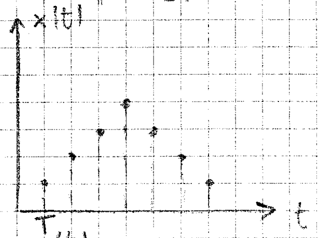
Tempo \ Ampiezza	CONTINUA	DISCRETA
CONTINUO	1	2
DISCRETO	3	4

1 

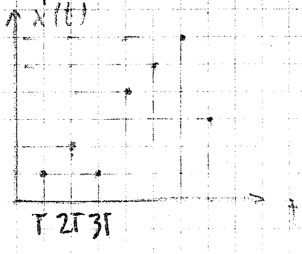
Segnale analogico: segue in maniera analoga l'andamento della grandezza fisica.

2 

Segnale analogico (ai limiti)

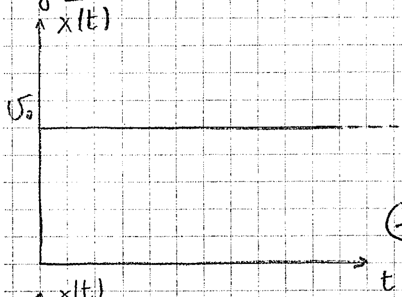
3 

$x(nT) = x[n]$ utilizzato dai computer

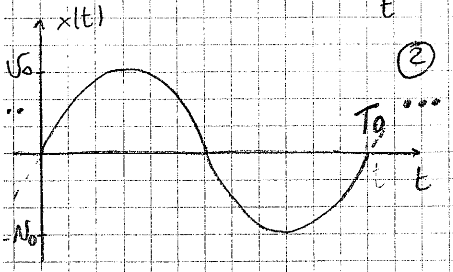
4 

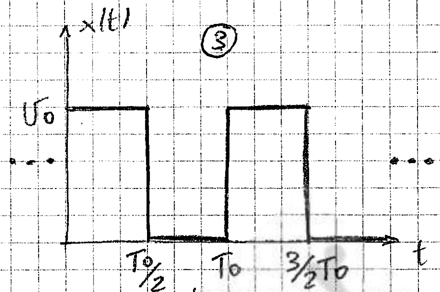
Segnale digitale

Segnale periodico $x(t) = x(t+T_0)\ \forall t$ T_0 è il periodo

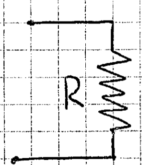


periodo qualsiasi





$x(t)\ [V]$

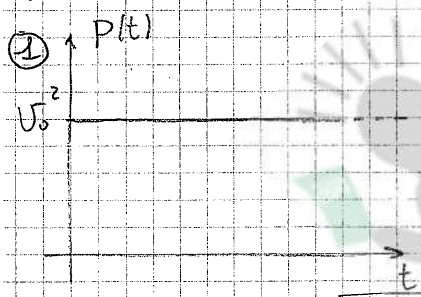


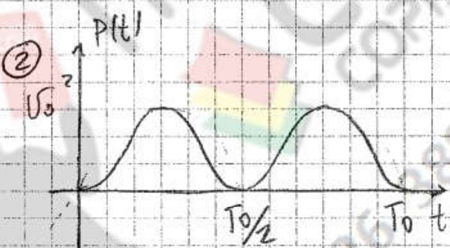
potenza dissipata

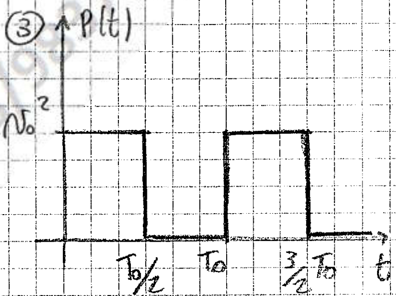
$$\boxed{P(t) = \frac{x^2(t)}{R}}\ [W] \qquad [\Omega]$$

POTENZA NORMALIZZATA: $\boxed{P(t) = x^2(t)}\ [V^2]$

Grafici per i tre esempi sopra







ENERGIA DEL SEGNALE $\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt}\ [J]$ SEGNALI COMPLESSI $\boxed{x(t) + j\,y(t)}$

$$E_{xT} = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt \rightsquigarrow P_{xT} = \frac{E_{xT}}{T} \text{ nel periodo}$$

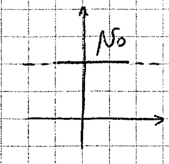
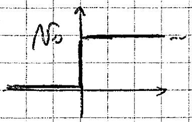
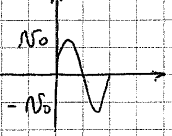
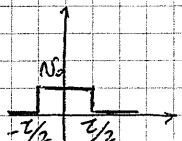
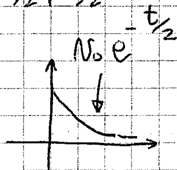
$$\boxed{P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt}$$ POTENZA MEDIA DEL SEGNALE $E_x = +\infty$ per segnali periodici

★ $P_x = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\,dt$ per segnali periodici

	E_x		P_x
PERIODICO T_0	$+\infty$	$\Leftarrow$	★ FINITA
NON PERIODICO $\Leftarrow$	FINITA $\Rightarrow$		0
	$V_0^2\,\tau$		

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt \quad \text{o} \quad x_m = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt$$

VALORE QUADRATICO MEDIO (valore efficace) $= \sqrt{P_x}$
Root mean square

$x(t)$	E_x	P_x	X_m	X_{RMS}
	$+\infty$	V_0^2	V_0	V_0
	$+\infty$	$V_0^2/2$	$V_0/2$	$V_0/\sqrt{2}$
	$+\infty$	$V_0^2/2$	0	$V_0/\sqrt{2}$
	$V_0^2\tau$	0	0	0
	$\frac{\tau}{2}$	0	0	0

03/03/17

Fourier notò che un segnale periodico può essere rappresentato da una combinazione lineare di funzioni sinusoidali.

$x(t)$ segnale periodico reale → $\boxed{x(t)=A_0+2\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\left(2\pi k\frac{t}{T_0}+\theta_k\right)}$ $A_k\geq 0$ $A_0\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}A_k\in\mathbb{R}^+\\A_0\in\mathbb{R}\end{cases}$

T_0 periodo → $T_0=\frac{1}{f_0}$ [Hz] frequenza fondamentale del segnale

L'argomento del coseno è $2k\pi\frac{t}{T_0}$, che posso scrivere come $2\pi(kf_0)t$

↳ freq. che cresce con k variante f_k

A_0 → componente continua

Termine con $k=1$ → componente fondamentale

kf_0 → frequenze armoniche (multipli della frequenza fondamentale)

Tutto questo si può chiamare $\boxed{\text{FORMULA DI SINTESI IN FORMA TRIGONOMETRICA}}$

Posso costruirmi una tabella con k, A_k, θ_k, se li ho, so come è fatto il segnale. Non è presente il valore né di f_0 né di T_0, ma una volta che è stabilito, con questa tabella posso rappresentare il segnale.

- È stata introdotta una formula EQUIVALENTE alla prima, ma più comoda nei calcoli.

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_k e^{i2\pi k\frac{t}{T_0}}}$$ → ho un esponenziale complesso

↳ $\boxed{\text{FORMULA DI SINTESI IN FORMA ESPONENZIALE}}$

Ricordiamo che $e^{i2\pi k t/T_0} = \cos\left(2\pi k \frac{t}{T_0}\right) + i\sin\left(2\pi k \frac{t}{T_0}\right)$

I coefficienti $x_k \in \mathbb{C}$, quindi sono fatti in modo tale da far sparire le componenti immaginarie nel ottenere alla fine un segnale reale.

Relazionando le due formule ottengo alcune relazioni:

$x_0 = A_0$

$$x_k = \begin{cases} A_k e^{i\theta_k} & k \geq 1 \\ A_{-k} e^{-i\theta_{-k}} & k \leq -1 \end{cases}$$ → In generale si utilizza la seconda formula di sintesi.

PROPRIETÀ ESPONENZIALE COMPLESSO:

- È una funzione periodica, quindi ne posso fare l'integrale

• $$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{i2k\pi \frac{t}{T_0}} dt \begin{cases} \xrightarrow{k=0} \int e^{i0} dt = \int [\cos(0) + i \sin(0)] dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(0) dt = T_0 \\ \xrightarrow{k \neq 0} = 0 + i0 = 0 \end{cases}$$

Se $k \neq 0$ il periodo delle onde è una frazione di T_0. Seno e coseno integrati per un periodo $=0$

• $$\cos\left(2\pi k \frac{t}{T_0}\right) = \frac{e^{i2\pi k t/T_0} + e^{-i2\pi k t/T_0}}{2}$$ • $$\sin\left(2\pi k \frac{t}{T_0}\right) = \frac{e^{i2\pi k \frac{t}{T_0}} - e^{-i2\pi k \frac{t}{T_0}}}{2i}$$

• $$\frac{d}{dt} e^{i2\pi k t/T_0} = \frac{i2\pi k}{T_0} e^{i2\pi k t/T_0}$$

• $$\int e^{i2\pi k t/T_0} dt = \frac{T_0}{i2\pi k} e^{i2\pi k \frac{t}{T_0}}$$

- Generalmente il problema da risolvere è: dato il segnale, scomporlo e capire quali sono i coefficienti della serie.

Quindi come faccio a capire come è fatto x_k?

Dato un segnale periodico

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) e^{-i2\pi k \frac{t}{T_0}} dt}$$ → Formula di analisi: ogni volta che cambio k all'esponenziale trovo un x_k diverso

↳ L'intervallo di integrazione è un qualsiasi intervallo di integrazione di estensione T_0. Sceglierò di volta in volta quello più comodo $[-T_0/2, T_0/2]$ o $[0, T_0]$ ecc.

- Vediamo il termine X_0

$$\boxed{X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) e^{0} dt = X_m (= A_0)}$$ → è la componente continua presente nel segnale (DC, direct current) (BIAS)

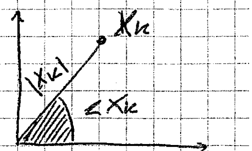
AC / DC
alternative direct

• Analizzatori di spettro → oggetti che creano una rappresentazione grafica degli x_k

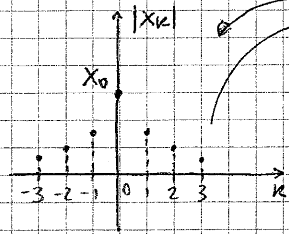
X_k sono numeri complessi e la rappresentazione più comoda è quella in modulo e fase $\longrightarrow$ $\boxed{X_k = |X_k| e^{i \angle X_k}}$ $\to$ angolo che racchiude X_k, la fase

$\to$ misura quanto sono sfasate le sinusoidi

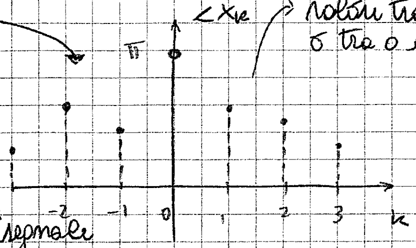
misura delle ampiezze delle sinusoidi



• Penso a due grafici in cui rappresentare modulo e fase del numero.



$\to$ devono ridursi con k che cresce prima o poi, perché altrimenti $x(t)$ diventa infinitamente grande



valori tra 0 e π o tra 0 e $-\pi$

• Conoscendo i due grafici conosco il segnale

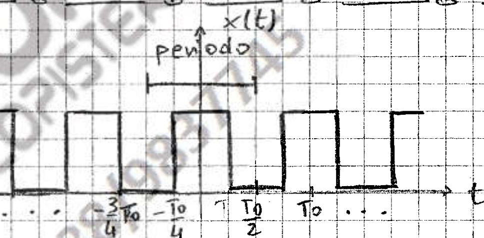
Si chiama SPETTRO in quanto la descrizione del segnale la do attraverso delle righe.

Se $x(t)$ è un segnale reale, si dimostra che i coefficienti X_k sono fatti:

$$X_k = X_{-k}^{*} \to \text{coniugato (Im cambia di segno)} \to \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| & \text{• simmetria pari in modulo} \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} & \text{• " dispari " fase} \end{cases}$$

- Se il segnale ha simmetria pari (cos): $x(t) = x(-t) \Longrightarrow X_k \in \mathbb{R}$, $X_k = X_{-k}$
- Se il segnale ha simmetria dispari (sin): $x(t) = -x(-t) \Longrightarrow X_k \in \mathbb{C}$, $X_k = -X_{-k}$ (*)

Un segnale molto comune è un'onda quadra

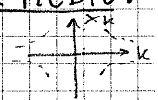


Gli X_k che usciranno devono essere reali in quanto il segnale è a simmetria pari, e dovranno avere simmetria pari (*)

Quindi per fare lo spettro basta un unico grafico, in quanto i valori sono reali. Inoltre $X_m = \frac{V_0}{2}$

N.B. CONTROLLARE SEMPRE EVENTUALI SIMMETRIE PARI/DISPARI E VALOR MEDIO!

Mi aspetto che le X_k vadano a ridursi man mano che $k \to \infty$ (possono essere anche <0)



Andiamo adesso a fare l'integrale. Come $[T_0]$ è comodo $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$. Ma siccome il segnale è nullo in $[-\frac{T_0}{2}, -\frac{T_0}{4}]$ e $[\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{2}]$ integro tra $-\frac{T_0}{4}$ e $\frac{T_0}{4}$.

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} V_0 e^{-i2k\pi\frac{t}{T_0}} dt = \frac{V_0}{T_0}\left[\frac{T_0}{-i2k\pi} e^{-i2k\pi\frac{t}{T_0}}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \quad \text{per } k \neq 0 \to \text{continuo...}$$

Se $k = 0 \to \quad X_0 = \frac{V_0}{\cancel{T_0}} \cdot \frac{\cancel{T_0}}{2} = \frac{V_0}{2}$

$$\to \text{continuo...} \quad \frac{V_0}{T_0}\left[\frac{T_0}{-i2k\pi} e^{-i2k\pi\frac{t}{T_0}}\right]_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} = \frac{V_0}{-i2k\pi}\left(e^{-i2k\pi/4} - e^{i2\pi k/4}\right) = \frac{V_0}{+k\pi}\left(\frac{e^{\frac{i\pi k}{2}} - e^{-\frac{i\pi k}{2}}}{2i}\right)$$

$$= \frac{V_0}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \longrightarrow \frac{V_0}{2k\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{V_0}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$