CAP. 1

Un segnale è una qualunque grandezza fisica che porta con se una informazione.

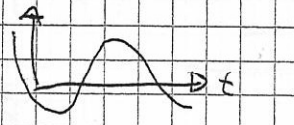
- SEGNALE A TEMPO CONTINUO: il dominio della funzione ha la cardinalità del insieme dei numeri reali. La variabile indipendente può assumere tutti i valori di quel dato intervallo
  - → variabile temporale (t)
  - → i segnali saranno indicati con $x(t)$, $y(t)$
- SEGNALE A TEMPO DISCRETO: il dominio della funzione ha cardinalità discreta. In matematica sono detti successioni (o sequenze)
  - → indicati con $x[n]$, $y[n]$
  - → variabile temporale [n]

master copy

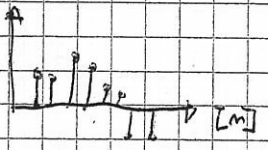
Sulla base dei valori assunti:

- segnali ad ampiezza continua
- segnali ad ampiezza discreta

Segnali ANALOGICI: tempo e ampiezza continua



Segnali DIGITALI: tempo e ampiezza discreti



Segnali DISCRETI: tempo discreto, ampiezza continua

Un resistore R, produce per effetto Joule $R \cdot i(t)^2$

Al segnale $x(t)$ è associata una potenza normalizzata

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad = \text{oppure} \quad E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

Per tutti i segnali fisici l'integrale risulta convergente → ENERGIA FINITA

Quando diverge è un segnale ideale

La potenza media è valutata su un intervallo [T]

$$P_{x_T} = \frac{E_{x_T}}{T}$$

- un segnale a energia finita ha potenza nulla

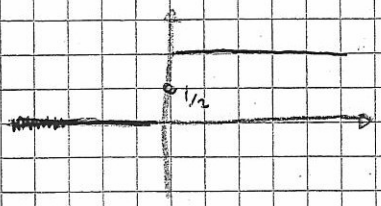
$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Torna utile invece utilizzare il VALORE EFFICACE

$X_{eff} = \sqrt{P_x}$

- FUNZIONE GRADINO UNITARIO

$$u(t) \rightarrow \begin{cases} 1 & t>0 \\ 1/2 & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



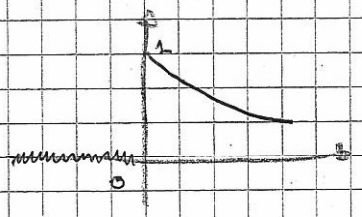
è discontinua nell'origine e consente una rappresentazione coincisa dei segnali causali, cioè nulli per $t<0$

$$E_u = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} 1 = +\infty$$ energia ill.

$$P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$ potenza media

- ESPONENZIALE MONOLATERO

$x(t) = e^{-t/T}\, u(t)$ ed è utilizzato per i fenomeni di scarica



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t/T} dT$$

$$= -\frac{T}{2} e^{-2t/T} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{T}{2}$$ perdè $+\infty \to 0$

Di conseguenza ha una potenza media nulla

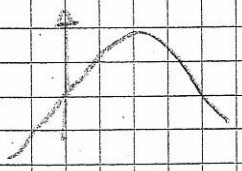
- SENO e COSENO

$x(t) = A \operatorname{sen}(2\pi t/T_0)$ SINUSOIDALE

ha energia illimitata

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \operatorname{sen}^2(2\pi t/T_0)\, dt = \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi t/T_0)\, dt\right]$$

$$= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2T_0}\int_0^{T_0/2} \cos(4\pi t/T_0)\, dt = \frac{A^2}{2}$$



$y(t) = A\cos(2\pi t/T_0)$ COSINUSOIDALE

- ESPONENZIALE COMPLESSO

$x(t) = e^{2\pi t j/T}$ ha energia illimitata e potenza media = 1

RAPPRESENTAZIONE DEI SEGNALI

La funzione $f(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ ammette una rappresentazione sintetica basata su

ampiezza → a

frequenza → f_0

fase → ϕ

master COPY

Le funzioni / segnali composti da contributi tonali possono essere analizzati nel dominio delle frequenze

Legge l'andamento in funzione di un punto di vista (non solo analitico) per vedere il tempo e poi la frequenza. Questa rotazione è però matematica per vedere queste frequenze. Questo cambio di vista lo si deve al matematico Fourier

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

È uno strumento di analisi adattato al tipo di segnale. La prima grande divisione è tra periodici e non periodici.

In questo caso i periodici con $T_0 = \frac{1}{f_0}$, e il periodo è detto T_0

il suo opposto è detto FREQUENZA FONDAMENTALE (perché c'è per forza)

e segnali del mondo reale $x(t) \in \mathbb{R}$.

Noto come i segnali periodici si prestano ad essere descritti da:

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{K=1}^{+\infty} A_K \cos(2\pi K f_0 t + \theta_K)$$ FORMULA DI SINTESI ①

Forma trigonometrica con soli coseni e reale poiché perché si usa una fase e una ampiezza.

Il prodotto di $K \cdot f_0 \Rightarrow$ K-esima armonica (ma $K=1$ non è contemplata) quindi da 2a ... a. Ogni armonica ha una ampiezza e una sua fase.

In questo caso $2A_K$ e θ_K

A_0 è detto VALOR MEDIO X_m o componente continua.

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} X_K e^{j2\pi K f_0 t}$$ FORMULA DI SINTESI ②

è di tipo esponenziale e equivalente alla prima

La somma ora si estende da $-\infty$ a $+\infty$

$$= \underset{k=0}{X_0} + \left(\underset{k=-1}{X_{-1}} e^{-j2\pi f_0 t} + \underset{k=1}{X_1} e^{j2\pi f_0 t} \right) + \dots$$

Devo ricorrere alla formula di Eulero

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k}$$

$$\Rightarrow x(t) = X_0 + \left(|X_{-1}| e^{-j2\pi f_0 t + j\angle X_{-1}} + |X_1| e^{j2\pi f_0 t + j\angle X_1} \right)$$

e sostituisco i coef. nella forma esponenziale.

Se le ampiezze e le fasi sono uguali avrei la cosenusoidale

i coef. devono avere simmetria pari $\Big\}$ $\rightarrow X_k = X_{-k}^*$

e la fase a simmetria dispari

queste due proprietà ricevono la SIMMETRIA HERMETIANA

$$X_k = \begin{cases} A_k e^{j\theta_k} & k \geq 1 \\ A_{-k} e^{-j\theta_{-k}} & k \leq -1 \end{cases}$$

Questa rappresentazione è più semplice e compatta (si può derivare meglio) ed è maggiormente simmetrica

Esiste anche la FORMULA DI SINTESI ③

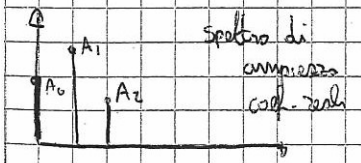
$$x(t) = a_0 + 2 \sum [a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)]$$

ma non è richiesta.

Prima di Fourier per descrivere la serie serviva il grafico.

Ora posso utilizzare i coefficienti → tramite tabelle

e si misurano in volt → Quindi sono tensioni

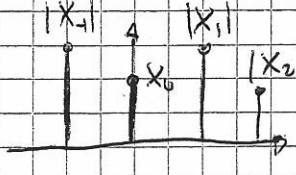


- le frequenze negative non esistono è un artificio di tipo analitico per creare le forme di sintesi ed è molto utile.

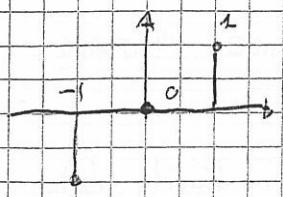
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi f_0 k t}$$

anche questa formula ha una propria tabella

k	f	$\lvert X_k \rvert$
-2	$-2f_0$	
-1		



spettro di ampiezza con simmetria pari



spettro di fase
con simmetria dispari

Lo spettro di ampiezza ci da più informazioni rispetto a quello reale

Come ricostruire una funzione?

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} X_K e^{j2\pi K f_0 t}$$ il tutto in [Volt]

Per calcolare gli X_K uso gli integrali

$$X_K = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi K f_0 t} dt$$ oppure $\int_0^{T_0} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2}$

Un coefficiente che si distingue è quello con $K=0$ e $f=0$

$$X_0 = A_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^0 dt = X_m$$ che è il valor medio

$X_0 = X_m$ è il valor medio o componente continua. È chiamato DC component nel campo della frequenza (Direct current) cioè una tensione a valore costante.

I diagrammi sono ovviamente gli spettri.

Non è certo che la serie di Fourier converga dappertutto sui punti del segnale origin

CRITERIO DI DIRICHLET

Ci fornisce delle condizioni sufficienti (che se verificate) ci permettono di che la serie di Fourier converge e che riproduca il segnale $x(t)$ da cui siamo partiti.

(a) Abbiamo 3 ipotesi che il nostro segnale deve rispettare

(1) sia assolutamente integrabile e (convergente)

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)| dt < +\infty$$

(2) Che ci sia un numero finito di discontinuità di prima specie (esistono limiti destro e sinistro). Quindi continua a tratti

(3) Contenga un numero finito di massimi e minimi, ovvia che sia derivabile ovunque

Quindi riguardano la continuità e la continuità della derivabilità.

Dopo aver verificato queste 3 condizioni, lo sviluppo in serie di Fourier

$$\sum^{+\infty} X_K e^{j2\pi K f_0 t}$$