LEZIONE 1
(capitolo 1)

- Rappresentazione discreta di segnali continui
- Stima di parametri deterministici
- Stima di parametri aleatori (stima Bayesiana)
- Modelli ARMA di processi aleatori tempo-discreti
  ↳ servono per risolvere problemi di FILTRAGGIO e PREDIZIONE sia per la STIMA PARAMETRICA dello spettro

SSP = Elaborazione dei segnali basata su modelli statistici dei dati

- Tutti i segnali che portano info devono essere modellati come segnali aleatori = segnali che, prima di essere osservati, sono noti a meno di parole che portano l'incognita (non sono perfettamente noti a priori).
- Un segnale è una funzione che descrive andamento di una grandezza fisica, ovvero di una grandezza che per natura è continua nel tempo e nello spazio.
  ↳ L'elaborazione che si fa di questi segnali è DIGITALE, si basa su dati acquisiti a partire dal segnale tempo e spazio-continuo
  → PROBLEMA della RAPPRESENTAZIONE (senza perdita di info) dell'info contenuta nel segnale originario tempo e spazio continuo, mediante un numero finito di dati (vettore di dati).
  1) Un possibile modo di discretizzazione di un segnale è quello di campionarlo (nel tempo) nel rispetto del Teo di Nyquist (i.e. $f_c \geq 2B$, B banda del segnale)

non è l'unico modo per fare ADC

2) sviluppo in serie di un segnale a potenza finita (potenza media), periodico
es: $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \vartheta)$, $t \in \mathbb{R}$, $T_0 = 1/f_0$ (periodo)

Sviluppo in serie di Fourier crea corrispondenza tra il segnale Tempo-continuo e un segnale discreto, dove variabile indipendente è $k \in \mathbb{Z}$ (S_k = peso della k-esima armonica del seg)

$$s(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} S_k$$

Nota: Trasformata serie di Fourier non causa perdita di info

Potenza media di $s(t)$: $P_s \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt \overset{(Parseval)}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S_k|^2$

$|s(t)|^2$ = potenza istantanea

$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt$ = energia di $s(t)$ su un periodo

Se $P_s < +\infty$ → potenza media finita (e energia ∞)

↳ Tutti i segnali è questa classe possono essere rappresentati come combin. lineare di espon. complessi le cui freq stanno in relazione armonica ($f_0 = 1/T_0$ e le altre freq sono multipli interi della fondamentale)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j\frac{2\pi k t}{T_0}} \quad \text{(eq sintesi)}$$

Nota: si ottengo $s(t)$ diversi perché combino S_k, non cambiano le funzioni della base

$$S_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}} dt \quad \text{(eq. analisi → rappresentazione discreta del segnale Tempo continuo)}$$

$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-j\frac{2\pi k t}{T_0}} dt$ = energia mutua tra $s(t)$ e il segnale della base su un periodo

↳ S_k è la POTENZA MUTUA tra $s(t)$ e il k-esimo esponenziale complesso

Nota: Poiché potenza media finita, le ampiezze di S_k significativamente $\neq 0$ è finito, quindi $P_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S_k|^2$ è una sommatoria che però

può essere troncata a un numero finito di termini, e pertanto mi facilita il calcolo di P_s (che altrimenti andrebbe fatto risolvendo un integrale).

(1) ↳ CALCOLO POTENZA MEDIA di un SEGNALE periodico in DIGITALE

↓

(2) Stessa cosa per calcolo POTENZA MUTUA tra due segnali $s(t)$ e $x(t)$

$$P_{sx} \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\,x^*(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k X_k^*$$

(Parseval generalizzato)

Nota: Potenza mutua è un indice di similarità tra due segnali.

(3) Angolo tra $s(t)$ e $x(t)$ (indice di similarità tra $s(t)$ e $x(t)$)

$$\theta \triangleq \text{Angle}(s(t), x(t)) : \cos\theta \triangleq \frac{|\text{Re}\{P_{sx}\}|}{\sqrt{P_s P_x}} \in \{-1, 1\}$$

(si dimostra con disug di Schwartz)

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\theta = 0 \rightarrow P_{sx} = 0 \Rightarrow s(t)$ e $x(t)$ ORTOGONALI

$\theta = 0 \vee \theta = \pi \rightarrow \cos\theta = \pm 1 \rightarrow s(t)$ e $x(t)$ sono COLINEARI (PROPORZIONALI)

- Se $s(t)$ è a banda limitata S_k è finito un numero
  ↳ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 = P_s$ ha rigorosamente un numero finito di termini.

es: $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \overset{FS}{\longleftrightarrow} S_k = \begin{cases} \frac{A}{2}e^{j\theta} & k=1 \\ \frac{A}{2}e^{-j\theta} & k=-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

↳ $P_S = \sum_{k=-1,1} |S_k|^2 = 2\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{2}$ ← dipende solo dall'ampiezza

(4) Calcolo uscita SLI con $s(t)$ periodico in ingresso

$$y(t) = s(t) \circledast h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{FS} y_k = S_k\, H\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

↳ Trasformata serie dell'uscita è un semplice prodotto algebrico tra S_k e i valori della risposta in frequenza (trasformata continua di $h(t)$) campionati a multipli di $1/T_0$

1) Teo campionamento: $s(t)$ a banda limitata B. aperiodico, energia finita può essere perfettamente ricostruito a partire dai propri campioni a patto che questi siano stati ottenuti nel rispetto della condizione di Nyquist ($f_c = \frac{1}{T_c} \geq 2B$)

$$s(t) \xleftrightarrow[\text{campion.}]{} s(kT_c)$$

$t \in \mathbb{R}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

↳ La rappres discreta in questo caso consta nei valori assunti dal segnale in cui istanti intervallati di T_c

Nota: 1) e 2) sono rappresentazioni discrete di segnali che è a eloni disgiunte! Per ciascuno delle 2 eloni ci sono anche altri modi di rappres, abbiamo richiamato esempi già noti:

- $s(t)$ si ricostruisce tramite INTERPOLAZIONE

$$s(t) = 2BT_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_c)\, \mathrm{sinc}\left(2B(t-kT_c)\right)$$

↳ combin lineare di sinc ritardate a banda B, dove i pesi dipendono dalla forma del segnale

BACK forma di $s(t)$ influenzata gli S_k, non la forma della base (analogia 1) e 2))

1) e 2) sono casi particolari di ESPANSIONE di un SEGNALE (sviluppo su base di un segnale):

$s(t)$ viene rappresentato come combinazione lineare di funzioni di una base, che non dipendono dalla forma di $s(t)$, con pesi che dipendono dalla forma di $s(t)$.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \varphi_k(t)$$

s_k: pesi; $\varphi_k(t)$: funzioni della base (o dizionario)

- Gli s_k sono la rappresentazione discreta del segnale $s(t)$ che cerchiamo

1) Segnali periodici a pot media finita

$$s_k = S_k = FS\{s(t)\}, \quad \varphi_k(t) \triangleq e^{j\frac{2\pi k t}{T_0}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) Segnali aperiodici a energia finita, banda limitata

$$s_k \triangleq \frac{2BT_c}{\sqrt{2B}} s(kT_c), \quad \varphi_k(t) = \sqrt{2B}\, \mathrm{sinc}\left(2B(t-kT_c)\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

in modo che i $\varphi_k(t)$ abbiano energia unitaria

↳ Questo approccio di sviluppo su base di un segnale è chiamato anche TRASFORMATA di FOURIER GENERALIZZATA (funzioni della base sono generiche e non esponenziali complessi) oppure ESPANSIONE (TRASFORMATA) di KARHUNEN-LOÈVE (KLT)

- La KLT mi permette una corrispondenza biunivoca tra $s(t)$ e s_k, la ricostruzione di $s(t)$ tramite gli s_k non è perfetta se non ho gli ∞ s_k (non posso averli perché non posso memorizzarne ∞ su calcolatore), quindi devo fare in modo che perdita di info sia tollerabile.

Nota: $\varphi_k(t)$ vanno scelti in maniera opportuna e secondo della classe di segnali che voglio rappresentare

master COPY COPISTERIA