2 Marzo 2018

Si definisce processo stocastico markoviano, un processo aleatorio in cui la probabilità di transizione che determina il passaggio a uno stato del sistema dipende solo dallo stato del sistema immediatamente precedente e non "da come" si è giunti in quello stato.

<u>Markov Property</u>: given the present, the future is conditionally independent from the past.

- Una catena di Markov è un processo markoviano con spazio degli stati discreto, che può essere finito o infinito numerabile.

- Una catena di Markov si dice omogenea se la probabilità di transizione non dipende dal tempo stesso, ma solo dalla differenza tra i due istanti considerati (indipendenza dall'origine dell'asse dei tempi).

<u>Discrete Time Markov Chain</u> (DTMC)

A stochastic sequence $\{X_n\}$ is a DTMC if

$$P_r\{\underbrace{X_{n+1}=x_{n+1}}_{\text{future}} \mid \underbrace{X_n = x_n}_{\text{present}}, \underbrace{\dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0}_{\text{past}}\} =$$

$$= P_r\{X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n = x_n\}$$

One step transition probability:

$$h_{ij}(n) = \{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

If the chain is homogeneous:

$$h_{ij} = \{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

Stochastic Matrix:

$$\underline{\underline{H}} = \{h_{ij}\}, \quad 0 \leq h_{ij} \leq 1 \text{ and } \sum_{j \in S} h_{ij} = 1$$

---

7 Marzo 2018

Probability mass function of the time spent in a state, given that we just reached that state:

W_i : discrete random variable (time spent in a state)

$$Pr\{W_i = 1\} = 1 - h_{ii}$$

$$Pr\{W_i = 2\} = (1 - h_{ii})h_{ii}$$

$$Pr\{W_i = 3\} = (1 - h_{ii})h_{ii}^2$$

$$\Rightarrow Pr\{W_i = n\} = (1 - h_{ii})h_{ii}^{n-1}, \quad n \geq 1$$

Il tempo di permanenza in uno stato, nel caso di catene di Markov omogenee a tempo discreto, ha una distribuzione geometrica

Geometric random variable:

- $\gamma \alpha^k$, con $k \geq 0$

  $(1-\alpha)\alpha^{k-1}$, $k \geq 1$

$$E\{W_i\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1}(1-\alpha) = (1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1} =$$

$$= \cancel{(1-\alpha)} \frac{1}{(1-\alpha)^{2}} = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-h_{ii}}$$

- Transition probability in n steps:

$$h_{ij}^{(n)} = P_r\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\} \Rightarrow \underline{\underline{H}}^{(n)}$$

<u>Chapman - Kolmogorov equations</u>

(i) $\underline{\underline{H}}^{(n)} = \underline{\underline{H}}^{(\ell)} \cdot \underline{\underline{H}}^{(n-\ell)}$

$0 < \ell < n$

- (ii) $h_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} h_{ik}^{(\ell)} \cdot h_{kj}^{(n-\ell)} \quad \forall (i,j) \in S$

Dimostrazione:

$$h_{ij}^{(n)} = P_r\{X_n = j \mid X_0 = i\} =$$

Probabilità totale: eventi mutuamente esclusivi, collettivamente esaustivi (tutte "le vie" da i a j, passando per un generico k).

$$= \sum_{k \in S} P_r\{X_n = j, X_\ell = k \mid X_0 = i\} =$$

Bayes

markovian property.

- $$= \sum_{k \in S} P_r\{X_n = j \mid X_\ell = k, \cancel{X_0 = i}\} \cdot P_r\{X_\ell = k \mid X_0 = i\} =$$

$$= \sum_{k \in S} h_{ik}^{(\ell)} \cdot h_{kj}^{(n-\ell)}$$

Quindi: $\underline{\underline{H}}^{(n)} = \underline{\underline{H}}^{(\ell)} \cdot \underline{\underline{H}}^{(n-\ell)}$

Si noti dunque che:

$$\underline{\underline{H}}^{(n)} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{H}}^{(n-1)} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{H}}^{(n-2)} = \dots = \underline{\underline{H}}^{n}$$

Nel caso di DTMC omogenee ed ergodiche:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \underline{\underline{H}}^{n} = \begin{bmatrix} q \\ q \\ \vdots \\ q \end{bmatrix}$$

con $\underline{q} = [q_0, q_1, \dots, q_N]$

Probability of state occupancy

$$p_i(n) = P_r\{X_n = i\}$$

initial probability vector:

$$\underline{p}(0) = [p_0(0), p_1(0), \dots, p_i(0), \dots]$$

$$P_r\{X_n = i\} = \sum_{k \in S} P_r\{X_n = i, X_0 = k\} =$$

$$= \sum_{k \in S} P_r\{X_n = i \mid X_0 = k\} \cdot P_r\{X_0 = k\} =$$

$$= \sum_{k \in S} h_{ki}^{(n)} \cdot P_r\{X_0 = k\}$$

$$\Rightarrow p_i(n) = \sum_{k \in S} p_k(0) \cdot h_{ki}^{(n)}$$

Quindi, in generale:

$$\underline{p}(n) = \underline{p}(0) \cdot \underline{\underline{H}}^{(n)}$$

$$\underline{p}(n+1) = \underline{p}(n) \cdot \underline{\underline{H}}$$

Stationary probability vector

$\underline{z}$, $0 \leq z_i \leq 1$ con $\sum_{i \in S} z_i = 1$ (condizione di normalizzazione)

tale che: $\underline{z} = \underline{z} \cdot \underline{\underline{H}}$

($\underline{z}$ è l'autovettore associato all'autovalore unitario della matrice di transizione)

Per particolari DTMC omogenee, quel sistema potrebbe avere soluzione non unica.

Limit probability

Sia $\underline{p}$, $0 \leq p_i \leq 1$ con $\sum_{i \in S} p_i = 1$:

$$\underline{p} = \lim_{n \to +\infty} \underline{p}(n) \Leftarrow \text{Asymptotic probability vector}$$

IF the limit exists, it is unique.

Per alcune DTMC omogenee il limite esiste ed è indipendente dalle condizioni iniziali; in questo caso il vettore $\underline{p}$ risulta essere anche soluzione stazionaria.