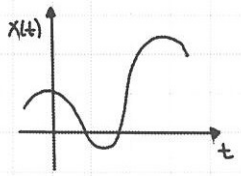
Cos'è un segnale? 23/09/20

Un segnale può essere una qualunque grandezza fisica variabile che porta con se un informazione
Un segnale può essere un accelerazione, una pressione, un segnale audio o video, che varia con il tempo.
I segnali possono essere classificati in base al Dominio e codominio

Dominio → zona di esistenza della variabile indipendente, che nel nostro caso coincide con il tempo, quindi è l'insieme dei valori che la variabile tempo può assumere

Codominio → insieme di tutti i valori che la funzione può assumere, ovvero è l'insieme dei valori che il segnale stesso (che è una funzione del tempo) può assumere

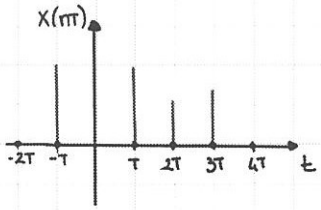
SEGNALE ANALOGICO



Dominio: Continuo
Codominio: Continuo

la variabile "t" può assumere tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$, e anche il segnale x(t) può assumere tutti i valori reali tra $-\infty$ e $+\infty$

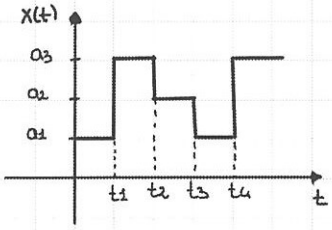
SEQUENZA



Dominio: Discreto
Codominio: Continuo

Essendo il dominio discreto, il tempo non assume tutti i valori reali all'interno di un intervallo, ma assume particolari valori, che possono essere anche infiniti, ma comunque ben definiti. Il codominio è invece continuo in quanto il segnale nei punti in cui esiste può assumere tutti i valori reali compresi in un certo intervallo

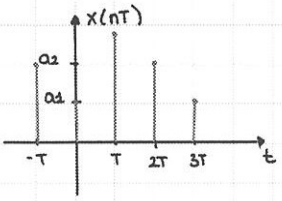
SEGNALE QUANTIZZATO



Dominio: Continuo
Codominio: Discreto

Esiste per tutti i valori del tempo ma assume solo certe ampiezze, ovvero il segnale x(t) non può assumere qualsiasi valore.

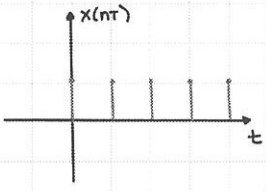
SEGNALI NUMERICI



Dominio: discreto
Codominio: discreto

Il segnale esiste solo in alcuni punti e anche i valori che il segnale assume sono limitati

Un particolare tipo di segnale numerico è il SEGNALE DIGITALE



Esiste solo in alcuni intervalli temporali e assume solo valori (0,1) → bit

Nella realtà i segnali che provengono da grandezze fisiche sono segnali analogici con dominio e codominio continuo; immaginiamo ad esempio la voce, che è una differenza di pressione che viene trasformata dal microfono (TRASDUTTORE) in un segnale elettrico continuo, che nel momento in cui passa al calcolatore viene elaborato come un segnale digitale e per fare ciò si passa attraverso tutti i tipi di segnale visti.

SEGNALI PERIODICI E APERIODICI

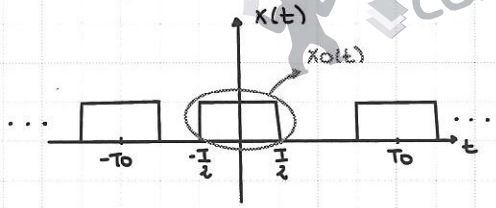
I segnali si possono classificare anche come PERIODICI e APERIODICI

Un segnale si dice PERIODICO di periodo "To" se vale la seguente proprietà:

$$x(t) = x(t + kT_0) \qquad \forall k \text{ intero}$$

$x_0(t)$ = SEGNALE DI BASE

Un segnale periodico si può anche scrivere come → $x(t) = \underbrace{rep}_{\text{ripetizione}} x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0)$



Un segnale che non soddisfa tale proprietà si definisce APERIODICO

ENERGIA E POTENZA DI UN SEGNALE

Consideriamo un segnale analogico $x(t)$ e definiamo l'energia del segnale come:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad x(t) \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \in \mathbb{C} \end{cases}$$

In genere lavoreremo con segnali reali in quanto lavoreremo con segnali fisici, però spesso per trattarli in maniera più semplice da un punto di vista matematico si usa la notazione complessa.

La potenza di un segnale $x(t)$ per definizione è uguale a:

$$P_x \triangleq \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Potremo dire che la potenza è l'energia divisa per l'intervallo di tempo con $T \to \infty$

Per le sequenze, ovvero per segnali del tipo $x(nT)$ o anche $x(n)$

$$E_x \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

In questo caso l'integrale è sostituito da una sommatoria

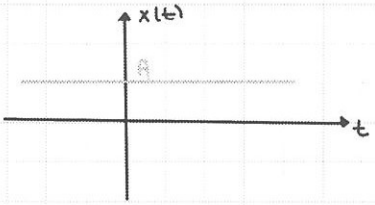
$$P_x \triangleq \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

OSSERVAZIONE

L'energia e la potenza possono assumere un valore finito o infinito (positivo)!
In quanto grandezze quadratiche non possono assumere valori finiti negativi o infinito negativo

ESEMPI: Calcolare energia e potenza dei seguenti segnali noteuoli

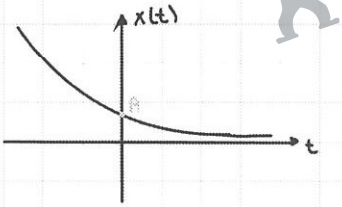
- $x(t) = A$ SEGNALE COSTANTE



$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt = +\infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} A^2 T = A^2 \quad \rightarrow \text{FINITA}$$

- $x(t) = Ae^{-\alpha t}$ $\alpha > 0$ ESPONENZIALE NEGATIVO



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} dt = \frac{A^2}{-2\alpha} \left[0 - \infty\right] = +\infty$$

$$A^2 \frac{1}{-2\alpha} \int e^{-2\alpha t} (-2\alpha)\, dt = \frac{A^2}{-2\alpha} \left[e^{-2\alpha t}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

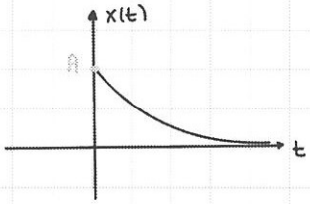
$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 e^{-2\alpha t}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{-A^2}{2\alpha T} \left[e^{-2\alpha t}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{-A^2}{2\alpha T} \left[e^{-\alpha T} - e^{\alpha T}\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{-A^2}{2\alpha T} \left[0 - \infty\right]$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{A^2}{2\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha T}}{T} = +\infty$$

(esponenziale va più velocemente a $+\infty$)

- $x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{con } \alpha > 0 \text{ e } t > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ ESPONENZIALE NEGATIVO MONOLATERO



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{-2\alpha} \left[e^{-2\alpha t}\right]_0^{\infty}$$

Da $-\infty$ a 0 il segnale è nullo, quindi possiamo cambiare gli estremi di integrazione

$$= \frac{A^2}{-2\alpha} \left[0 - 1\right] = \frac{A^2}{2\alpha} \quad \text{FINITA}$$

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{A^2}{2\alpha T} = \phi \quad \text{NULLA}$$

- Tutti i segnali che hanno ENERGIA FINITA hanno POTENZA NULLA
- Tutti i segnali che hanno POTENZA FINITA hanno ENERGIA INFINITA
- Ci sono poi segnali che hanno sia POTENZA che ENERGIA INFINITE

ENERGIA E POTENZA DI SEGNALI PERIODICI

Ricordiamo che il segnale periodico è uguale a:

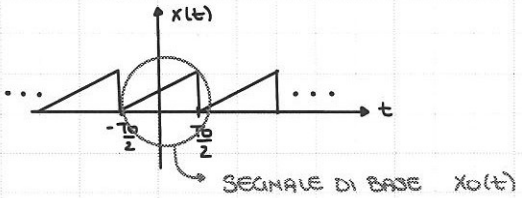
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0)$$

e che l'energia di un generico segnale è uguale a:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

master COPY COPISTERIA

In quanto per segnali periodici il segnale di base $x_0(t)$ si ripete infinite volte, anche l'energia di questo segnale si ripeterà infinite volte, quindi possiamo scrivere l'energia come:



$$E_x \triangleq \lim_{N\to\infty} N \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = +\infty$$

grandezza positiva

I segnali periodici hanno sempre ENERGIA INFINITA

Proviamo ora a calcolare la potenza del segnale periodico

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{NT_0} N \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Divido l'asse T in N periodi

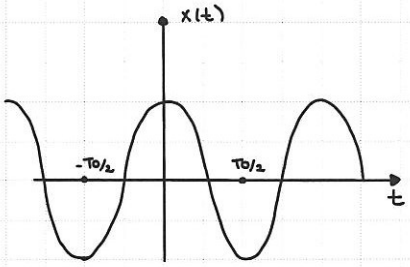
FINITA

La potenza di segnali periodici in genere è FINITA

ESEMPIO: Calcolare energia e potenza di un segnale periodico

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ SEGNALE MONOCROMATICO → In quanto è un segnale a singola frequenza "f_0", e i colori vengono percepiti come variazioni di frequenze

PERIODO $T_0 = \frac{1}{f_0}$ inverso della frequenza



$E_x = +\infty$ in quanto segnale periodico

Calcoliamo la potenza del segnale periodico:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2\cos^2(2\pi f_0 t)\, dt = \frac{A^2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\, dt$$

$$\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}$$

$$= \frac{A^2}{2T_0}\left[T_0 + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(4\pi f_0 t)\, dt\right] = \frac{A^2}{T_0}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(4\pi \frac{t}{T_0}\right) dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(2\pi \frac{2}{T_0} t\right) = 0$$

Se facciamo l'integrale del coseno o del seno su un multiplo del periodo l'integrale è uguale a 0 in quanto il periodo è $T_0/2$, qui stiamo facendo l'integrale su due periodi

notiamo che il periodo di questo segnale è uguale a $T_0/2$

SEGNALE SINUSOIDALE:

$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$

$E_x = +\infty$ in quanto segnale periodico

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2\sin^2(2\pi f_0 t)\,dt = \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\frac{1-\cos(4\pi f_0 t)}{2}\,dt = \frac{A^2}{2T_0}\left[T_0 - \int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2}\cos\left(2\pi\frac{2}{T_0}t\right)dt\right] = \frac{A^2}{2}$$

ϕ come nel caso precedente

SEGNALE COMPLESSO

$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ ESPONENZIALE COMPLESSO

$x(t) = A[\cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)]$ segnale periodico, in quanto parte reale e immaginaria sono periodiche

master COPY

RICORDA

$e^{jx} = \cos x + j\sin x$ $\quad Re = \cos x \quad Im = \sin x$

FORMULA DI EULERO → $\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$; $\sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

Consideriamo il numero complesso "c", lo possiamo scrivere come:

$c = a + ib$; $c = |c|e^{j\theta}$ dove $|c| = \sqrt{a^2+b^2}$ modulo

$\theta = \angle\theta = \text{arctg}\frac{b}{a}$ fase

Calcoliamo il modulo di $e^{j2\pi f_0 t}$

$e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t) \Rightarrow \sqrt{\cos^2(..) + \sin^2(..)} = \sqrt{1} = 1$

Calcoliamo energia e potenza del segnale periodico:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|Ae^{j2\pi f_0 t}|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\,dt = \infty \qquad P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|Ae^{j2\pi f_0 t}|^2 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 dt = A^2$$

Calcolare E_x e P_x di $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$

$E_x = +\infty$ in quanto segnale periodico

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} A^2\cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0)\,dt = \frac{A^2}{2T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta_0)\,dt$$

$$= \frac{A^2}{2T_0}\left[T_0 + \int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos\left(2\pi\frac{2}{T_0}t + 2\theta_0\right)dt\right] = \frac{A^2}{2}$$

PERIODO $\frac{T_0}{2}$ → $\int = \phi$

master COPY COPISTERIA