Teoria dei Segnali

- Definizione di Segnale
- È una grandezza fisica, che trasporta un'informazione. (es. battito cardiaco, livello di grigio in un'immagine .....)
- In genere, i segnali vengono rappresentati come funzioni di qualche variabile.
es.

$x(t)$
↳ Segnale
↳ Variabile indipendente
- Come il segnale cambia in funzione del tempo

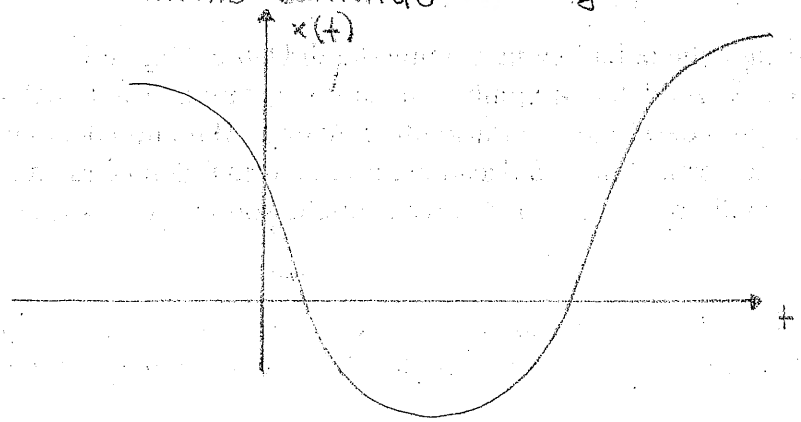
- Segnale monodimensionale dipende da una sola variabile
- Segnale multidimensionale dipende da più variabili (es. immagine)

- I segnali hanno tutti un dominio e un codominio. Il dominio è l'insieme di definizione della variabile indipendente mentre il codominio è l'insieme di definizione del segnale.
In base a questi 2 abbiamo diversi tipi di segnale.

Dominio continuo: la variabile t può assumere tutti i valori reali in un intervallo.

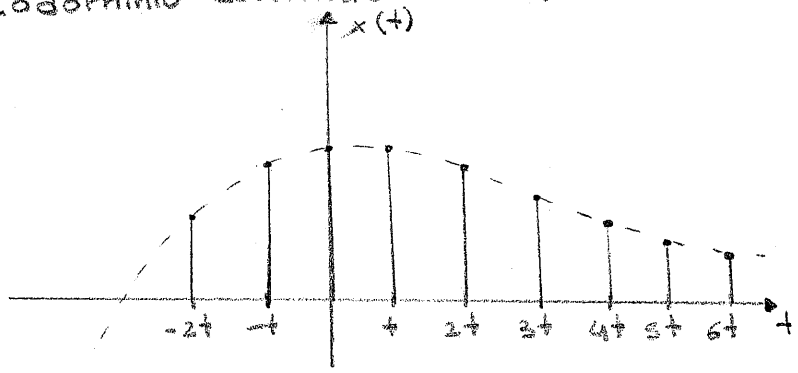
Dominio discreto: la variabile t può assumere solo alcuni valori discreti (es solo valori interi).
La stessa cosa vale per il codominio.

1. Dominio continuo
   Codominio continuo ⇒ Segnali continui e analogici

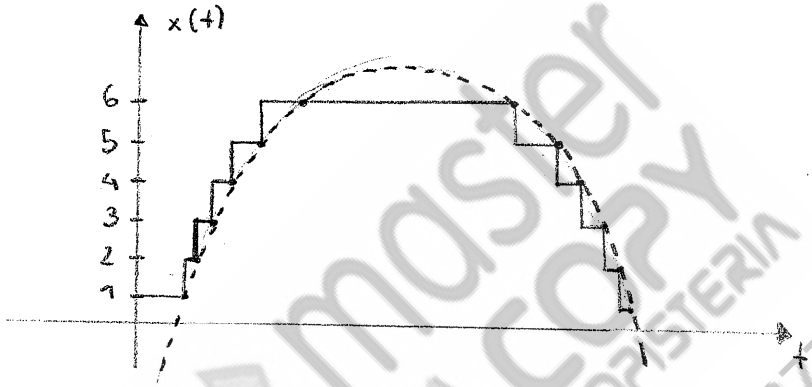


MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2. Dominio discreto
Codominio continuo ⇒ Sequenza

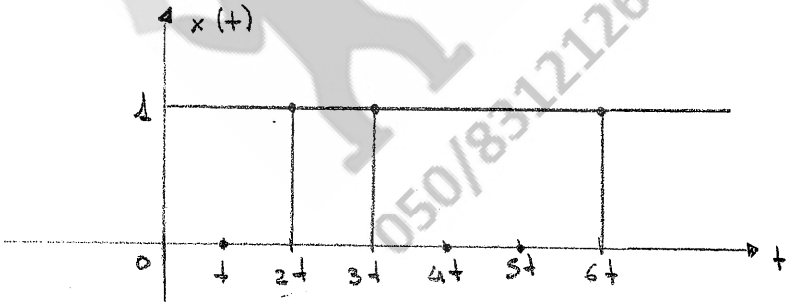


3. Dominio continuo
Codominio discreto ⇒ Segnale quantizzato



· Il segnale può assumere solo determinati valori detti Livelli

4. Dominio discreto
Codominio discreto ⇒ Segnale digitale



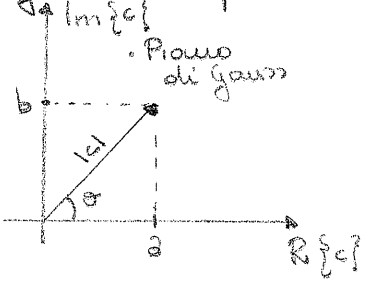
· Esiste anche Segnali Complessi

$c = a + ib$

$a = \Re\{c\}$

$b = \mathrm{Im}\{c\}$

$i = \sqrt{-1}$



$|c|$ → Modulo

θ → Fase

$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\angle c = \theta = \arctan \frac{b}{a}$

$C = |c| e^{i\theta}$

↳ Forma Polare

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

master COPY CARTOLERIA 050/8312126 388/9837745

- Segnali reali → Hanno solo la parte reale.
- Segnali complessi → Hanno sia una parte reale e sia una parte immaginaria
- Segnali periodici → Si ripetono periodicamente allo stesso modo.

$t_0 \quad x(t) = x(t + N t_0) \quad \forall t, \forall N$ intero

↳ Periodico di t_0 (t_0 è il periodo)

- Ci interessa come è fatto il segnale nel periodo, perché tanto si ripete

- Segnali aperiodici → Non è possibile individuare il periodo rispetto al quale il segnale si ripete.

- Energia

$x(t)$

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

- Potenza

$x(t)$

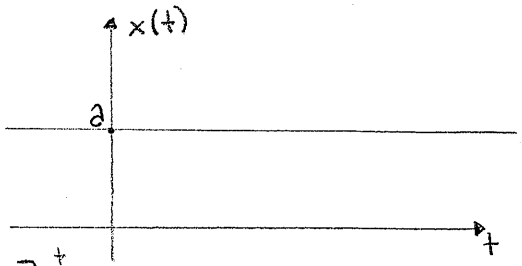
$$P_x \triangleq \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

es.

$x(t) = a \qquad a = \text{cost}$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \, dt = a^2 t \Big]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

- Energia infinita



$$P_x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \cdot \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} a^2 \, dt = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \, a^2 t \Big]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\cancel{t}} \cdot a^2 \cancel{t} = a^2$$

- E_x infinita
- P_x finita

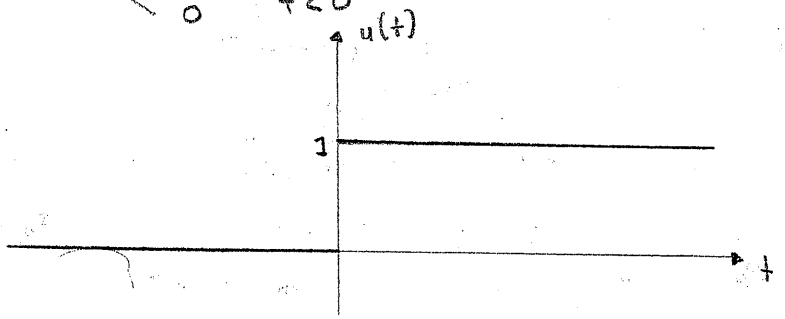
- Potenza finita

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

· Segnale Gradino unitario

$$u(t) \begin{cases} 1 & t>0 \\ 1/2 & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

* Spesso in 0 il segnale non è definito



· Ex infinita [Area di un rettangolo infinito]

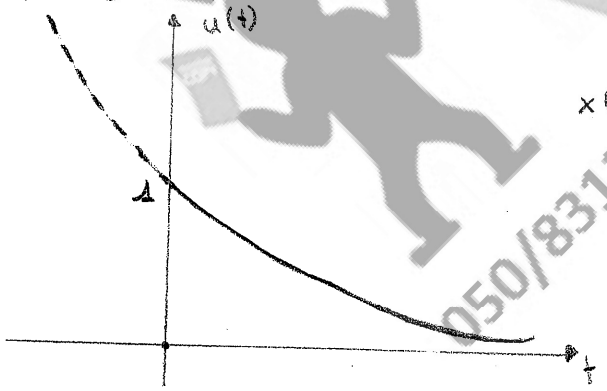
· Px finita

$$P_x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} 1^2 u^2(t)\, dt = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\frac{t}{2}} 1\, dt = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

- Un segnale che ha Px infinita non può avere Ex finita.
- Un segnale che ha Ex infinita può avere Px finita.

· Segnale Esponenziale monolatero

$x(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t) \qquad \alpha > 0$



$$x(t) \begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

[Altro modo di scrivere il segnale]

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} \cdot u^2(t)\, dt = -\frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

· Ex finita

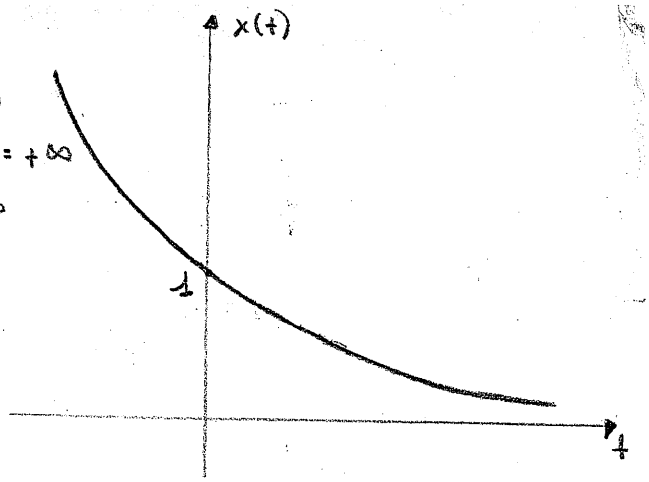
$P_x = 0$

· Tipicamente i segnali che hanno Ex finita hanno potenza nulla.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Segnale Esponenziale

$x(t) = e^{-\alpha t}$



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha t}\,dt = -\left.\frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

$$P_x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} e^{-2\alpha t}\,dt =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left[-\frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2\alpha}\left[e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{\alpha t}}{2\alpha t} = +\infty$$

($e^{-\alpha t} \to 0$)

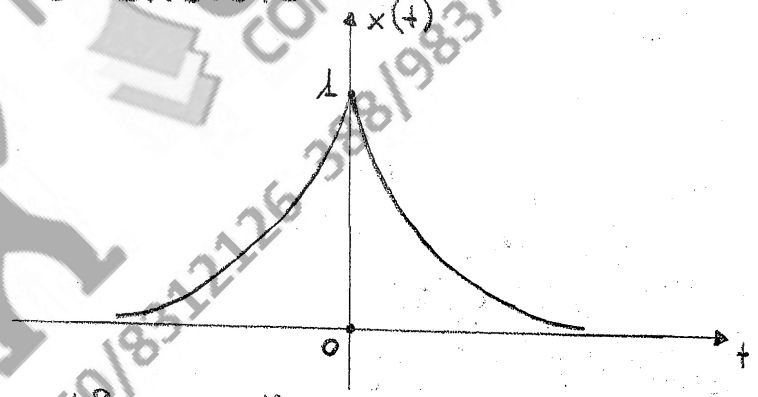
- E_x infinita
- P_x infinita

(*) L'esponenziale va ad inf. infinito più rapidamente di qualunque potenza

- Segnale Esponenziale bilatero

$x(t) = e^{-\alpha|t|}$

- Energia finita
- $P_x = 0$



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha|t|}\,dt = \int_{-\infty}^{0} dt + \int_{0}^{+\infty} dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha t}\,dt =$$

$$= -\frac{2e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

master copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745