TEORIA DEI SEGNALI

30/09/19

Un segnale è una qualunque grandezza fisica variabile a cui è associata un informazione.

→ MONODIMENSIONALI (hanno una variabile indipendente) (tempo)

→ MULTIDIMENSIONALI (esempio IMMAGINE (x,y) e video (x,y,t))

→ REALI (costituiti dalla sola parte reale

→ COMPLESSI (COSTITUITI da parte reale e immaginaria

Un segnale è una funzione del tempo $x(t)$ e perciò possiede sia un DOMINIO che un CODOMINIO

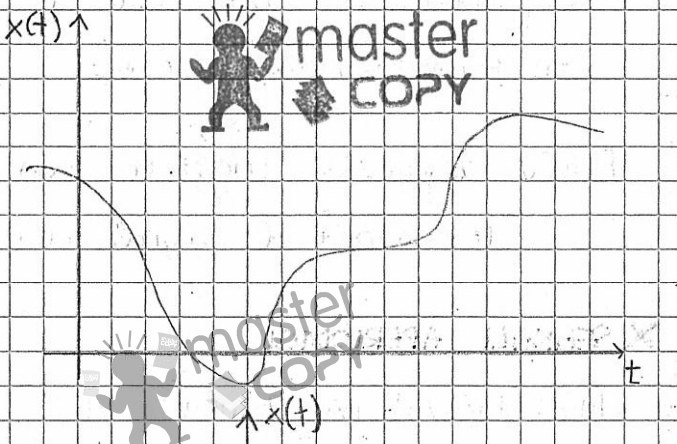
- DOMINIO → insieme di definizione della variabile indipendente (t)
- CODOMINIO → insieme di definizione del segnale (x)

Sia DOMINIO che CODOMINIO possono essere continui o discreti, ho perciò quattro tipi di segnali

SEGNALE CONTINUO & ANALOGICO

D continuo
C continuo

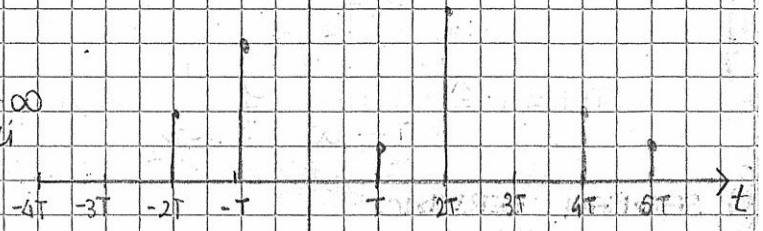
SIA T che X ASSUMONO VALORI DA $-\infty$ a $+\infty$



SEQUENZA DI SEGNALI

D discreto
C continuo

X ASSUME VALORI DA $-\infty$ a $+\infty$
t assume solo alcuni valori che sono i multipli di T



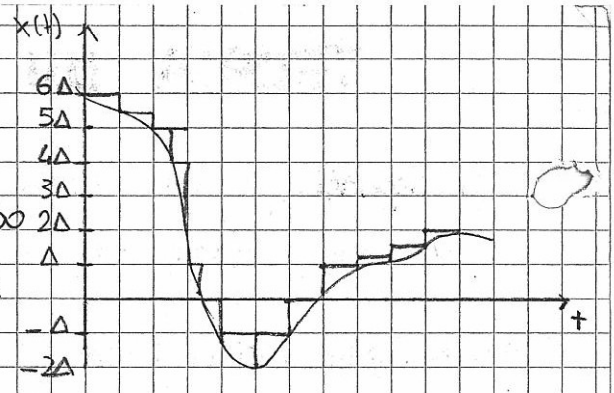
Le sequenze si ottengono dal CAMPIONAMENTO dei segnali continui e sono indicate con $X(n) = X(nT)$

↳ INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO

SEGNALE QUANTIZZATO

D continuo
C discreto

t assume valori da $-\infty$ a $+\infty$
x assume solo alcuni valori chiamati livelli o quanti

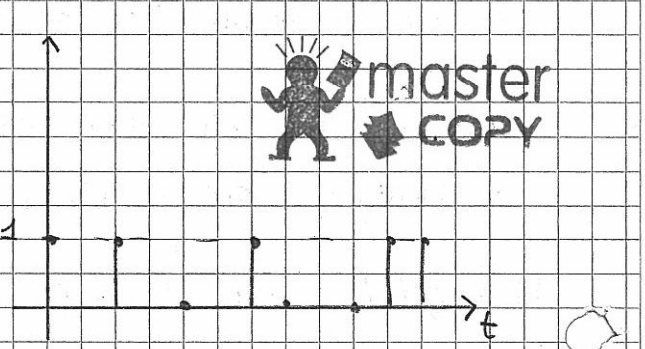


SEGNALE DIGITALE o DISCRETO

D discreto
C discreto

Sia t che x sono quantizzati

es. binario → seq. di zero e uni



master COPY

Noi lavoriamo con segnali continui e sequenze

COME FUNZIONA IL CD?

La traccia è una sequenza di vuoti e pieni (risp. bit 0 e bit 1) che il laser legge. Al contrario il segnale continuo viene campionato e ogni livello è codificato in binario e viene trasformato nella traccia.

Dalla sequenza digitale con la campionazione si può tornare al segnale continuo.

master COPY

N.B
$\triangleq$ uguale per definizione

SEGNALI APERIODICI

CARATTERIZZATI DA 2 GRANDEZZE

$$\text{ENERGIA} \triangleq \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

→ MODULO QUADRO SIA PER I REALI CHE PER I COMPLESSI

$$\text{POTENZA} \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

SEGNALI PERIODICI

$$x(t) = x(t + KT_0) = \underset{T_0}{\text{rep}} \, x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0)$$

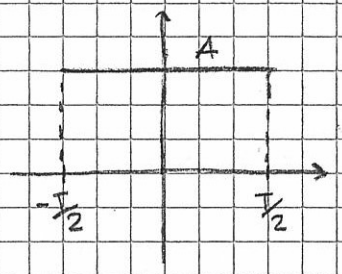
n → NUMERO DI REPLICHE

SONO SEGNALI NON PERIODICI RIPETUTI

ESEMPI ENERGIA

- SEGNALE RETTANGOLO

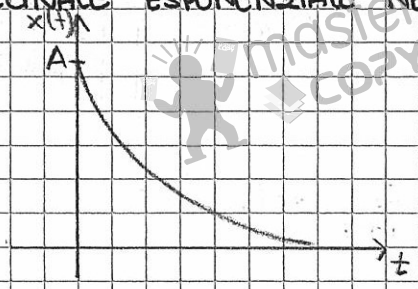
$$x(t) = \begin{cases} A & |t| < T/2 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$



$$Ex = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 T \quad \text{FINITA!}$$

master COPY

- SEGNALE ESPONENZIALE NEGATIVO MONOLATERO $x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t>0 \ \alpha>0 \ A>0 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$

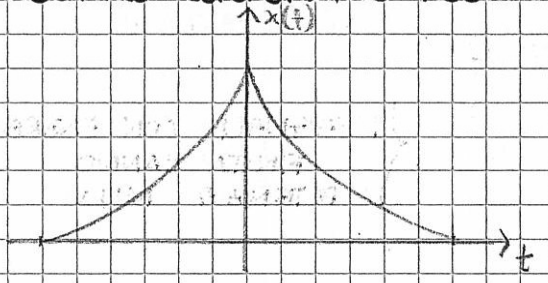


$$Ex = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt$$

$$= \left| \frac{A^2 e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right|_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha} \quad \text{FINITA!}$$

ENERGIA MAI NEGATIVA POICHÉ QUADRATICA

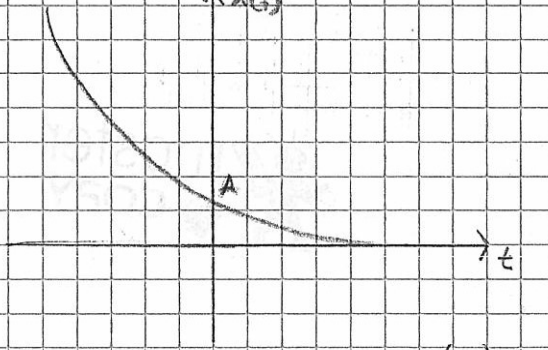
- SEGNALE ESPONENZIALE NEGATIVO BILATERO $x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ e^{\alpha t} & t<0 \end{cases}$



$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha|t|} dt$$

$$= 2\int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{\alpha} \quad \text{FINITA!}$$

- $x(t) = Ae^{-\alpha t} \quad \alpha > 0$

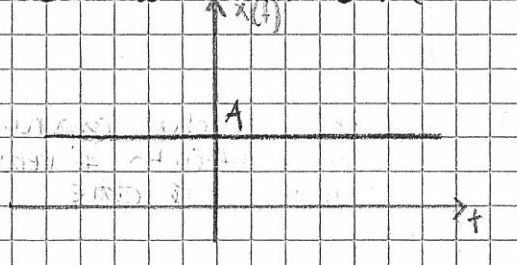


$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt$$

$$= \left| \frac{A^2 e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \quad \text{INFINITA!}$$

master COPY

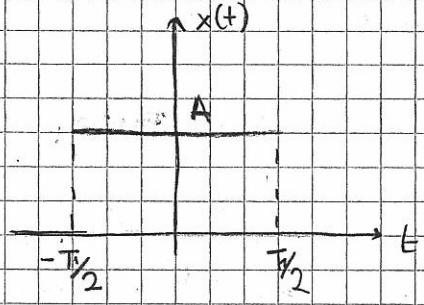
- SEGNALE COSTANTE $x(\ ) = A$



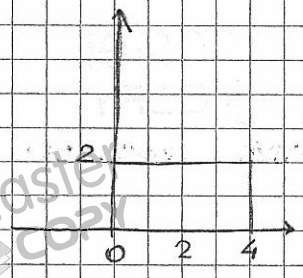
$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt = +\infty \quad \text{infinita!}$$

ESEMPI POTENZA

- SEGNALE RETTANGOLO $x(t) = \begin{cases} A & |t| < T_1/2 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$



$x(t) = A\,\text{rect}\left(\frac{t-0}{T_1}\right)$ → DOVE È CENTRATO; → LUNGHEZZA



$x(t) = 2\,\text{rect}\left(\frac{T-2}{4}\right)$

master COPY

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} A^2\,\text{rect}^2\left(\frac{t}{T_1}\right) dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} A^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2 T_1}{T} = 0$$

- SEGNALE ESP. NEGATIVO MONOLATERO $x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t}\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{A^2}{2\alpha} = 0$$

{I SEGNALI CON ENERGIA FINITA HANNO POTENZA NULLA}

- SEGNALE COSTANTE $x(t) = A$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2 T}{T} = A^2 \text{ finita!}$$

- $x(t) = Ae^{-\alpha t} \quad \alpha > 0$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 e^{-2\alpha t}\,dt$$

master COPY

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| \frac{A^2 e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{T} \frac{A^2}{2\alpha} \left[e^{-\alpha T} - e^{\alpha T} \right]$$

$$= -\frac{1}{T} \frac{A^2}{2\alpha} (0 - \infty) = \infty$$ poiché esponenziale va a infinito + velocemente di tutte le altre potenze

ENERGIA

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

CALCOLO AREA E LA MOLTIPLICO PER LE INFINITE REPLICHE DEL SEGNALE

$$= \sum_{n \to -\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x_0(t)|^2 \, dt$$

$$= \lim_{N \to \infty} (2N+1) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x_0(t)|^2 \, dt = +\infty$$

$(2N+1)$: tante a dx quante a sx; quella centrale

N.B Energia segnale periodico è sempre infinita!

POTENZA

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

T per periodic $= (2N+1)T_0$

$$P_x = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(2N+1)T_0} (2N+1) \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x_0(t)|^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x_0(t)|^2 \, dt$$

La potenza complessiva è calcolata sul singolo periodo!

FREQUENZA FONDAMENTALE $f_0 = \frac{1}{T_0}$

es.

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$x(t) = x(t + kT_0)$$

$$x(t) + x(kT_0) = A \cos(2\pi f_0 (t + kT_0))$$

$$= A \cos(2\pi f_0 t + 2\pi k f_0 T_0)$$

$$= A \cos(2\pi f_0 t)$$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) \, dt = \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2}$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{2} \, dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(4\pi f_0 t) \, dt \right]$$