Classificazione dei segnali

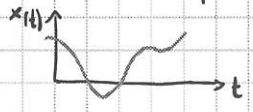
- **SEGNALE**: grandezza fisica che trasporta un'informazione
  - → MONODIMENSIONALI: dipendono da una variabile (il tempo);
  - → MULTIDIMENSIONALI: dipendono da più variabili.

- un segnale viene trattato come una funzione $x(t)$; si definiscono quindi:
  - → DOMINIO: insieme di valori su cui è definita la variabile indipendente (t);
  - → CODOMINIO: insieme di valori su cui è definita la variabile dipendente ($x(t)$).

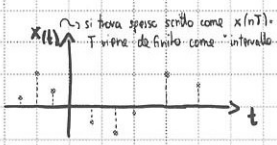
- si distinguono due possibilità di esistenza per i due insiemi:
  - → CONTINUO: può assumere tutti i valori reali (o complessi) compresi tra $-\infty$ e $+\infty$;
  - → DISCRETO (o quantizzato): può assumere solo un numero limitato di valori, cioè la variabile può esistere solo in alcuni punti.

- in base a questa classificazione si hanno 4 possibili combinazioni e 4 tipi di segnali:

1) **SEGNALE CONTINUO**: DOMINIO CONTINUO, CODOMINIO CONTINUO

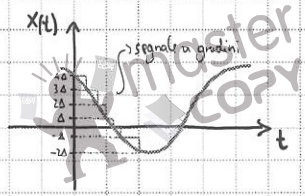


2) **SEQUENZA**: DOMINIO DISCRETO, CODOMINIO CONTINUO



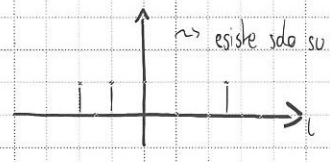
↳ si trova spesso scritto come $x(nT) = x[n]$ perché esiste solo per specifici valori di t; T viene definito come "intervallo di campionamento"

3) **SEGNALE QUANTIZZATO**: DOMINIO CONTINUO, CODOMINIO DISCRETO



Si parte dal segnale continuo e si suppone che il codominio discreto possa assumere solo alcuni valori; quindi tutte le volte che il segnale assume valori in un intervallo del codominio (es. $\Delta \div 0$), $x(t)$ assume il valore maggiore.
Il segnale viene quindi quantizzato, cioè tutti i valori che potrebbe assumere vengono mappati su un numero finito di valori, ovvero i livelli o i quanti. Il segnale esiste per tutti i valori di t ma solo per determinati valori di $x(t)$ (i quanti).

4 SEGNALE DISCRETO: DOMINIO DISCRETO
(o DIGITALE) CODOMINIO DISCRETO



~ esiste solo su alcuni valori del tempo e del codominio (es. sequenza di 0 e 1

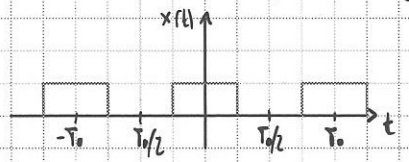
Segnali continui

master COPY COPISTERIA

- si dividono in:

↳ SEGNALI PERIODICI: se $x(t) = x(t+kT_0) = \underset{T_0}{rep}\, x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t+nT_0)$

T_0 è il PERIODO; il segnale si ripete uguale ad ogni intervallo k di T_0



N.B.: la formula precedente afferma che posso rendere periodico qualsiasi segnale (non periodico ma limitato nel tempo) ripetendolo ad ogni multiplo di K (ripetizioni)

↳ SEGNALI APERIODICI: segnali che non soddisfano la precedente proprietà

- si individuano due grandezze che definiscono i segnali continui, ma che si differenziano tra segnali periodici e aperiodici:

↳ ENERGIA ↳ POTENZA

↳ SEGNALI APERIODICI:

↳ Energia: $E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x_{(t)}|^2 \, dt$

↳ numero finito: integrale converge ~ ENERGIA FINITA
↳ numero infinito: integrale diverge ~ ENERGIA INFINITA

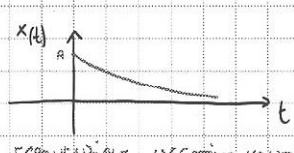
ESEMPI: 1) $x_{(t)} = \begin{cases} A & \text{per } |t| < T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



master COPY

$E_x = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \, dt = A^2 T$ energia finita

2) $x_{(t)} = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{per } t>0 \quad (A>0 \; \alpha>0) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

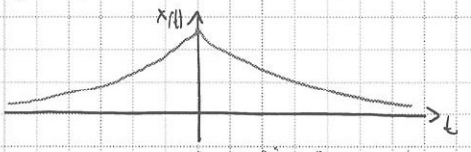


ESPONENZIALE NEGATIVO MONOLATERO

$$E_x = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t}\,dt = \frac{A^2 e^{-2\alpha t}}{-2\alpha}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha}$$ ENERGIA FINITA

N.B.: L'energia è sempre positiva (grandezza quadratica)!!!

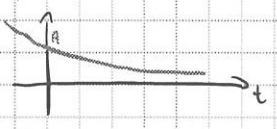
3) $x(t) = A e^{-\alpha|t|}$



ESPONENZIALE NEGATIVO BILATERO

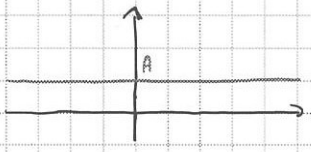
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha|t|}\,dt = \frac{A^2}{\alpha}$$ ~ non c'è bisogno di fare il calcolo poichè è simmetrico. È quindi il doppio dell'energia trovata precedentemente (basta calcolarla tra 0 e $+\infty$)

4) $x(t) = A e^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0$



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t}\,dt = \frac{A^2 e^{-2\alpha t}}{-2\alpha}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$ ENERGIA INFINITA

5) $x(t) = A$

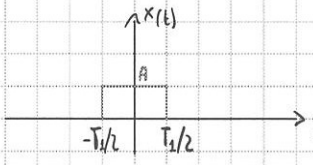


$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\,dt = +\infty$$

↳ Potenza: $P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$

N.B.: è l'energia divisa per il tempo T, dove però T tende all'infinito

Esempi: 1) $x(t) = \begin{cases} A & |t| < T_1/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



NOTAZIONE: il segnale si può anche scrivere:

$$x(t) = A\,\text{rect}\left(\frac{t-0}{T_1}\right) = A\,\text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right)$$

dove: rect: tipo di segnale (rettangolo)
T_1: larghezza del segnale
0: centro del segnale
t: variabile indip. funzione

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} A^2\,\text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right)dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} A^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} A^2 T_1 = 0$$

2) $x(t) = \begin{cases} A e^{-at} & \text{con } a>0,\ t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 e^{-2at}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} A^2 e^{-2at}\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{A^2 e^{-2at}}{-2a}\Big|_0^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{A^2\left[e^{-2a\frac{T}{2}} - 1\right]}{-2a} = 0$$

N.B.: i segnali che hanno energia finita hanno potenza nulla!!!

3) $x(t) = A$ (quindi $E_x = \infty$)

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} A^2 T = A^2$$

4) $x(t) = A e^{-at}$ con $a>0$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 e^{-2at}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{A^2 e^{-2at}}{-2a}\Big|_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{(-2a)T}\left[e^{-aT} - e^{aT}\right] =$$

$= +\infty$ perché l'esponenziale tende all'infinito più velocemente

N.B.: energia infinita $\not\Rightarrow$ potenza finita

SEGNALI PERIODICI:

Energia: $E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x_0(t)|^2\, dt = \lim_{N\to\infty} (2N+1) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x_0(t)|^2\, dt = +\infty$

La formula deriva dal fatto che abbiamo una somma di segnali identici tra loro ma separati e facendo il quadrato si ha un altro segnale periodico; siccome è costituito da repliche tutte uguali, basta calcolare l'area di un segnale e moltiplicarlo per il numero di repliche, cioè ∞. Quindi posso calcolare l'energia di ciascuna replica e sommarle successivamente tra loro (tramite la sommatoria). Considero allora N (per comodità) che tende all'infinito e il numero di repliche sarà $(2N+1)$ che, moltiplicato per l'integrale, darà sempre $+\infty$.

N.B.: l'energia non sarà mai negativa; può essere uguale a 0 solo se il segnale è identicamente nullo!

L'energia di un segnale periodico è quindi sempre infinita.

↳ Potenza: $P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)T_0} (2N+1) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x_0(t)|^2 dt =$

$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$

↳ considerando che T è la durata del segnale (che va da $-T/2$ a $T/2$), possiamo scrivere $T = (2N+1)T_0$, dove T_0 è il periodo e $(2N+1)$ è il n° dei periodi. Si considerano quindi tutti gli infiniti multipli del periodo T_0 e, prendendo la sommatoria dell'energia come l'energia su ciascun periodo per il numero di periodi, la potenza complessiva di un segnale periodico si va a calcolare su un singolo periodo, in quanto i fattori che tendono all'infinito si semplificano.

(ESEMPI): 1) $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ NOTAZIONE: $f_0 = \frac{1}{T}$ FREQUENZA FONDAMENTALE

devo dimostrare che $x(t) = x(t + KT_0) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow x(t+KT_0) = A\cos[2\pi f_0 (t+KT_0)] = A\cos(2\pi f_0 t + 2\pi K f_0 T_0) =$

$= A\cos(2\pi f_0 t)$ perché il coseno è periodico

$E_x = \infty$ SEMPRE per segnali periodici

$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt = \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\, dt =$

$= \frac{A^2}{T_0} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{2} dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(4\pi f_0 t)\, dt \right] = \frac{A^2}{T_0} \left[\frac{T_0}{2} - 0 \right] = \frac{A^2}{2}$

2) $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$E_x = \infty$

$P_x = \frac{A^2}{2}$ P_x non cambia perché viene calcolata sullo stesso periodo, che possiamo far iniziare dove vogliamo (la traslazione non cambia nulla)