TEORIA DEI SEGNALI

I segnali

Un segnale è una qualsiasi grandezza fisica variabile che contiene un'informazione. I segnali principali sono:

- MONODIMENSIONALI, la cui variabile indipendente è il tempo
- BIDIMENSIONALI, (es: immagine definita da pixel) la cui variabile indipendente è l'asse cartesiano xy.
- TRIDIMENSIONALI, la cui variabile indipendente è l'asse xyz.

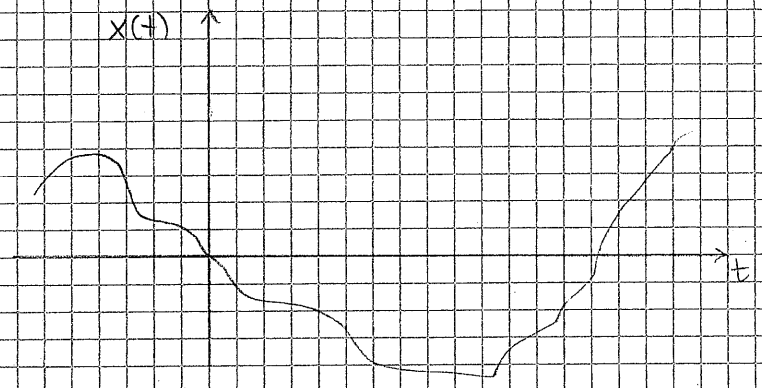
Ci sono inoltre sia segnali REALI che COMPLESSI.

L'insieme di definizione della variabile indipendente è il DOMINIO, mentre l'insieme di definizione della variabile dipendente è il CODOMINIO.

Ci sono 4 categorie generiche di segnali $x(t)$:

- SEGNALE ANALOGICO (o CONTINUO)

  dominio continuo, codominio continuo } la variabile "t" può assumere tutti i valori compresi tra (a, b), come $x(t)$

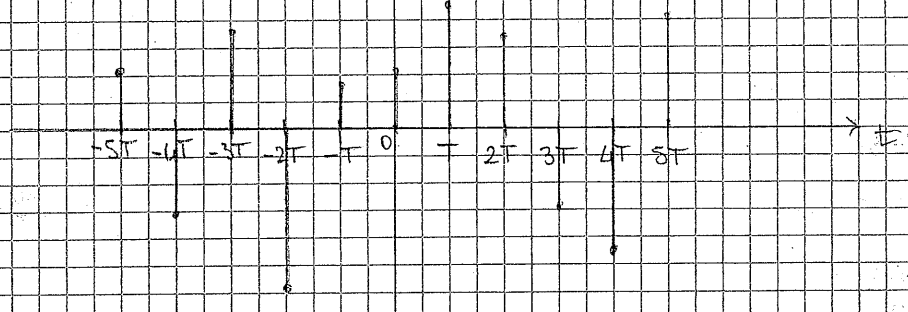


master COPY COPYSTORM

- SEGNALE DISCRETO (O SEQUENZE)

  dominio discreto, codominio continuo } $x(t)$ può assumere tutti i valori, mentre "t" può assumere solo i multipli di un valore detto QUANTO TEMPORALE T

$x(n) = x(nT)$



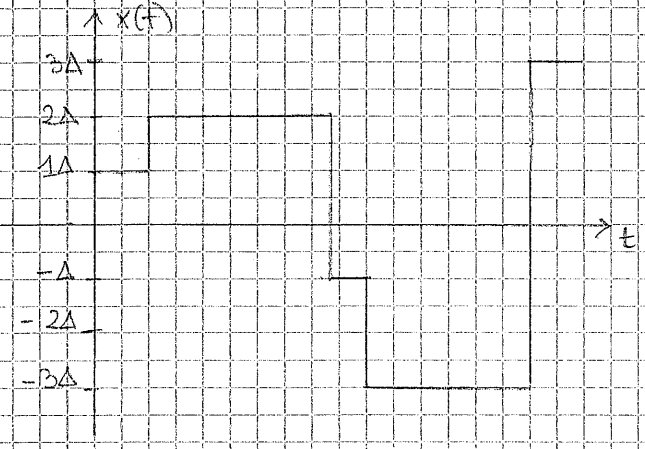
FACTOR

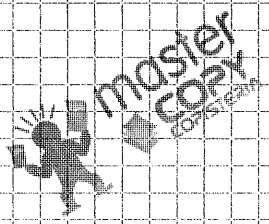
Queste sequenze si ottengono tramite CAMPIONAMENTO di segnali continui. Esempio: interruttore che si apre e si chiude a intervalli di tempo multipli di T.



▷ SEGNALI QUANTIZZATI

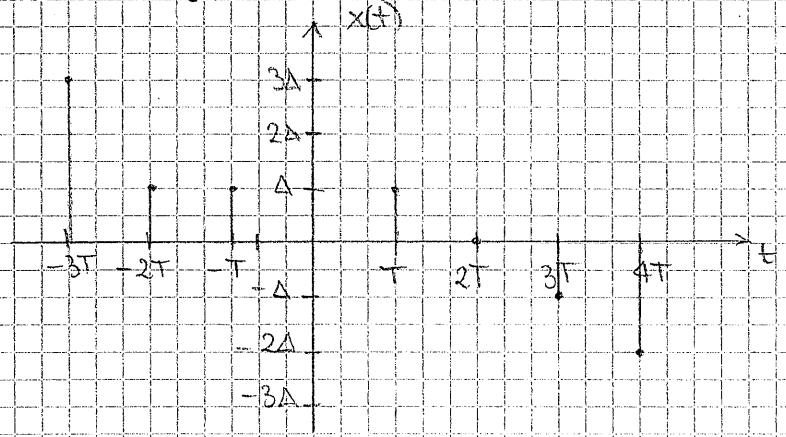
dominio continuo } x(t) può assumere solo alcuni valori detti
codominio discreto } LIVELLI, i quali possono essere definiti su diverse scale (lineare, logaritmica, ...)





▷ SEGNALI DIGITALI

dominio discreto } sono quantizzati sia tempo che ampiezza.
codominio discreto }



I segnali continui

I segnali continui possono essere:

- PERIODICI, se il segnale $x(t)$ si ripete uguale a se stesso con periodo T_0 e quindi se $x(t) \equiv x(t+kT_0)$
- APERIODICI, se $x(t) \neq x(t+kT_0)$

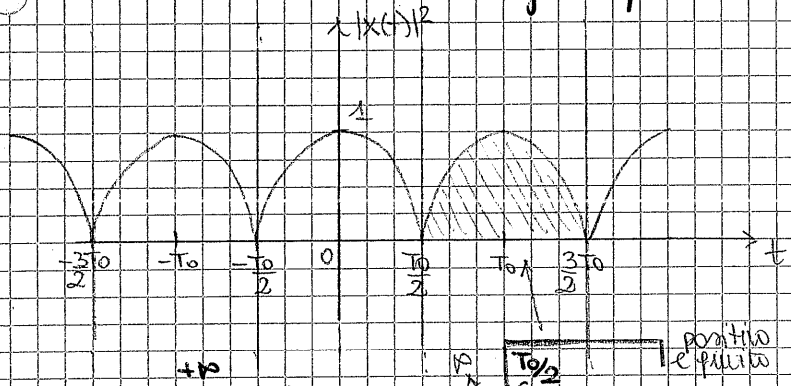
e sono caratterizzati da energia e potenza, tra loro correlate:

- energia: $$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$
- potenza: $$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{T}$$

{ energia finita $\Longrightarrow$ potenza nulla }

Consideriamo $x(t)$ un segnale periodico: $x(t) = x(t+kT_0)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t-nT_0) = \underset{T_0}{rep}\, x_0(t)$$

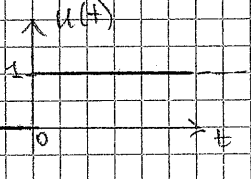


$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{n\to\infty} n \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = +\infty$$

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{NT_0} \cdot N \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

* gradino unitario, segnale con discontinuità di 1° specie

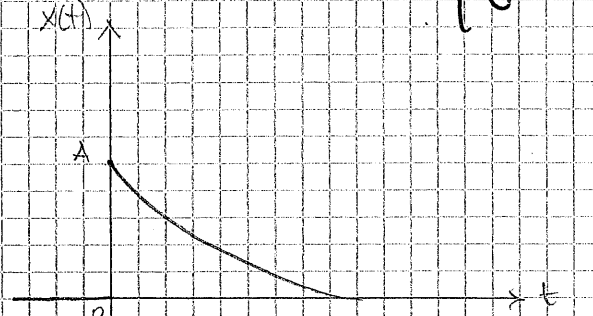
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} dt = +\infty$$

▷ Esponenziale monolatero negativo

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}, \quad \alpha>0 \text{ (al crescere di } \alpha \text{ aumenta la pendenza)}$$



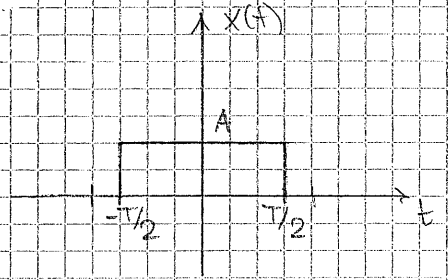
$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} |x(t)|^2 dt + \int_{0}^{+\infty} |x(t)|^2 dt =$$

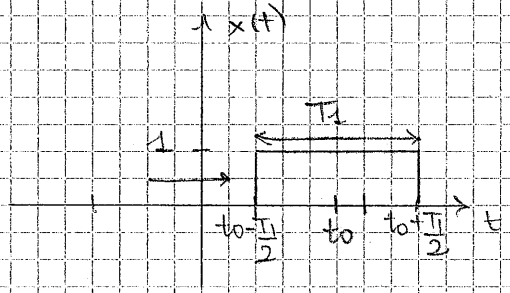
$$= A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = A^2 \left[\frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{A^2}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha} \Downarrow$$

$$Px = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = 0$$

▷ Segnale rettangolo





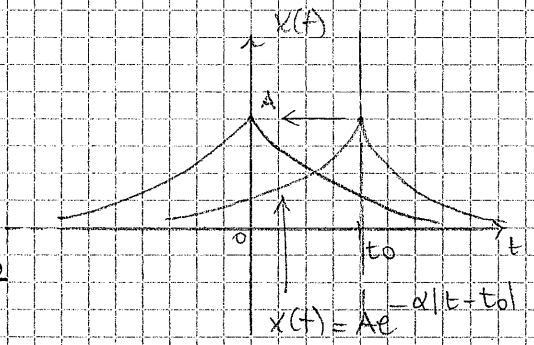
$$x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-0}{T_1}\right) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \qquad x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T_1}\right)$$

$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 T_1 \Longrightarrow Px = 0$$

▷ Esponenziale bilatero negativo

$$x(t) = Ae^{-2\alpha|t|} = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t>0 \\ Ae^{\alpha t} & t<0 \end{cases}$$

$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha|t|} dt = 2\int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{\alpha}$$



▶ Segnale periodico

a. $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \qquad f_0 = \frac{1}{T_0}$

$x(t) \overset{?}{=} x(t+KT_0) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}(t+Kt_0)\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + 2K\pi\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

$= A\cos(2\pi f_0 t)$

Ex = +cos (abbiamo calcolato prima)

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2\cos^2(2\pi f_0 t)\,dt = \frac{A^2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos^2(2\pi f_0 t)\,dt = \frac{A^2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(4\pi f_0 t)\,dt = \left\{\begin{matrix} f_1 = 2f_0 \\ T_1 = \frac{T_0}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{A^2}{2}$$



b. $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\,\text{sen}(2\pi f_0 t)$

$\text{Re}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \cos(2\pi f_0 t)$

$\text{Im}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \text{sen}(2\pi f_0 t)$

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt = 1.$$

$$\begin{cases} c = a+jb = |c|e^{j\theta} \\ |c^2| = cc^* = a^2+b^2 \\ \angle c = \theta = \text{arctg}\,\frac{b}{a} \\ \cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \\ \text{sen}\,x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2} \end{cases}$$

Trasformata Serie di Fourier

$x(t) = x(t+KT_0) \quad \forall K$

$x(t) = a_0 + a_1\cos(2\pi f_0 t + \theta_1) + a_2\cos(4\pi f_0 t + \theta_2) + a_3\cos(6\pi f_0 t + \theta_3)$

$+ \ldots + a_n\cos(2n\pi f_0 t + \theta_n).$

Le componenti cosenosoidali hanno tutte frequenza multiplo intero della frequenza fondamentale f_0 e propria ampiezza.

Nella trasformazione, in uscita ci saranno sempre componenti cosenosoidali con frequenza e ampiezza diversa rispetto alla situazione iniziale.

$$\begin{cases} x(t) = A_0 + 2\sum_{K=1}^{+\infty} A_K\cos(2\pi K f_0 t + \theta_K) \\ a_0 = A_0 \\ a_K = 2A_K \end{cases}$$