Appunti delle lezioni di
"Teoria dei Segnali"

Prof.ssa Maria Sabrina Greco

1. CHE COS'È UN SEGNALE

Un **segnale** è una qualunque grandezza fisica variabile a cui è associata un'informazione.
Un segnale può essere un'accelerazione, una velocità, una variazione di pressione ma anche un segnale acustico o elettrico. Tutti questi tipi di segnali sono monodimensionali, la variabile indipendente è il tempo, ma i segnali possono anche essere bi, tri o quadri dimensionali.
Un esempio di segnale bi-dimensionale è l'immagine. L'immagine in bianco e nero ha vari livelli di grigio ed è costituita da vari pixel, quindi il segnale sarà il livello del grigio e la variabile indipendente le coordinate x e y.
Un esempio di segnale tri- dimensionale è il film dove le variabili indipendenti diventano x, y, t (tempo). Il valore dei colori son il valore della funzione, ossia il segnale.

I segnali possono essere di tipo reale o complesso. I segnali reali hanno solo la parte reale, i segnali complessi hanno anche una parte immaginaria.

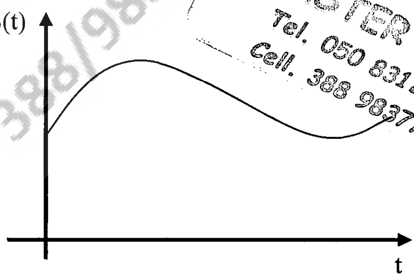
Il **dominio** è l' insieme di definizione della variabile indipendente.
Il **codominio** è l'insieme di definizione del segnale (variabile dipendente).

Un generico segnale è $x(t)$.
Il dominio è l'insieme di definizione di t, il codominio è l'insieme di definizione di x.
A seconda che il dominio e il codominio siano continui o meno possiamo dividere i segnali in 4 categorie:

Segnali Analogici O Continui

Hanno sia dominio che codominio continui

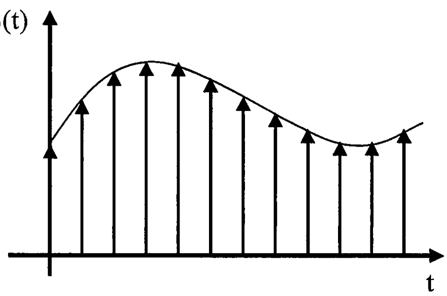
t assume tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$;
x assume tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$.



Segnali Discreti O Sequenze

Hanno dominio discreto e codominio continuo

t assume solo alcuni valori.
I valori che t assume sono multipli di T (quanto temporale)
X può assumere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$.



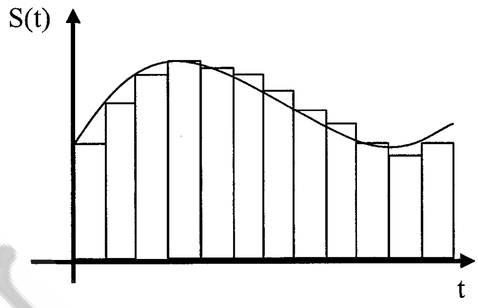
Le sequenze si ottengono attraverso il **campionamento dei segnali** continui. Le sequenze vengono indicate con $x(n)$ o $x(nT)$.

Il campionamento si ottiene mettendo all'ingresso di un interruttore un segnale, l'interruttore si chiude istantaneamente per tempi t multipli di T e poi si riapre. Conosceremo solo il valore di uscita del segnale ossia quando l'interruttore è chiuso.
All'ingresso è posto un segnale continuo dal quale si ottiene una sequenza.
Il campionamento ci permette di trasformare i segnali continui in digitali, ossia segnali che possono essere analizzati da un calcolatore.

Segnali Quantizzati

Il dominio è continuo mentre il codominio è discreto.

t assume tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$;
x assume solo alcuni valori chiamati livelli.



Segnale Digitale

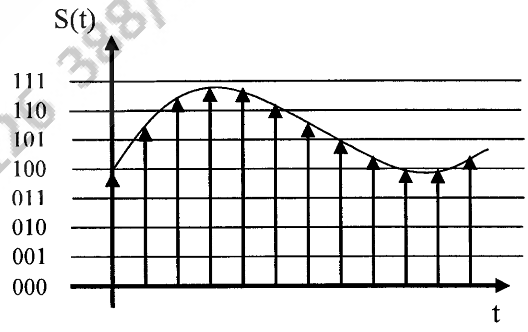
Il dominio e il codominio sono discreti.

Sia la variabile indipendente che il segnale sono quantizzati.

Un esempio di segnali digitali sono i segnali binari che possono assumere solo due valori (quindi due livelli) 0 e 1.
Una sequenza di 0 e 1 che viene elaborata da un calcolatore è un segnale digitale.
Con la sequenza di 0 e 1 si può sintetizzare qualunque livello, ossia se per esempio ho i livelli -1, -2, -3, -4, 0, 1, 2, 3, 4 posso trasformarli in bit sintetizzandoli.
Quanti bit ci servono per generare 8 livelli?
Il primo bit è per lo 0 o l'1.

Lo 0 sarà	000
L'1 sarà	001
Il 2 sarà	010
Il 3 sarà	011
Il 4 sarà	100
Il 5 sarà	101
Il 6 sarà	110
Il 7 sarà	111

Ho quindi bisogno di 3 bit.



1.2 I segnali continui o analogici

Proprietà:

- **PERIODICITÀ**

Un segnale x(t), segnale continuo, è periodico di periodo T_0 se $x(t) = x(t+kT_0)$ dove k è un numero intero:
es.
sen(t) e cos(t) hanno periodo $T_0 = 2\pi$

• APERIODICITÀ

Un segnale x(t), segnale continuo, è aperiodico se non esiste alcun valore di k tale che x(t) = $x(t+kT_0)$ dove k è un numero intero.

Energia:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

Potenza:

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E}{T}$$

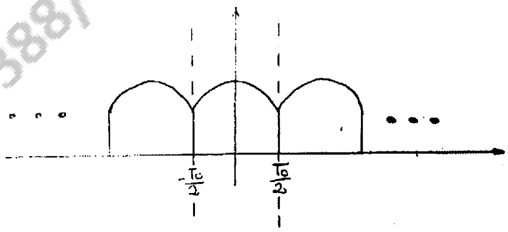
I segnali possono essere classificati in base alla finitezza di potenza.
Preso un segnale generico se l'energia è finita la potenza è 0; se l'energia è infinita allora la potenza può essere finita o infinita.

DIM. L'ENERGIA DI UN SEGNALE PERIODICO È SEMPRE ∞

Sia $x(t) = x(t + kT_0)$ un segnale periodico allora:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{N\to\infty} \cancel{N} \frac{1}{T_0 \cancel{N}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt > 0 \text{ anzi } = \infty$$

a meno che il segnale non sia identicamente nullo.



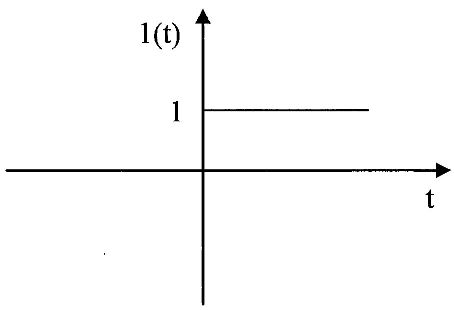
$$P_x = \lim_{T\to\infty} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\cancel{N} T_0} \cancel{N} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$ dove T_0

è l'ampiezza del segnale di base.

1.3 Funzioni notevoli:

Gradino Unitario



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Il segnale vale $\frac{1}{2}$ in t= 0 poiché quello è il valore della semisomma del limite destro e sinistro della funzione nel punto t = 0.

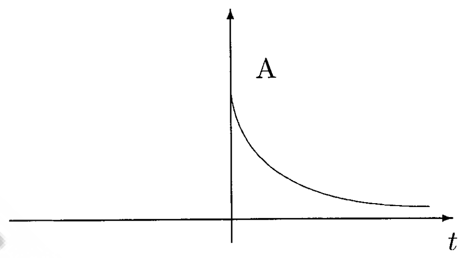
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \, dt = \int_{0}^{+\infty} 1 \, dt = \infty$$

Lo si trova moltiplicato ad altri segnali perché viene utilizzato per limitare l'intervallo della funzione.

Esponenziale Negativo Monolatero

È un segnale aperiodico

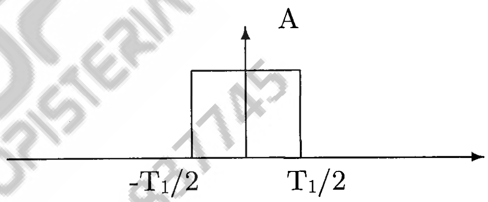
$$x(t) = \begin{cases} Ae^{\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



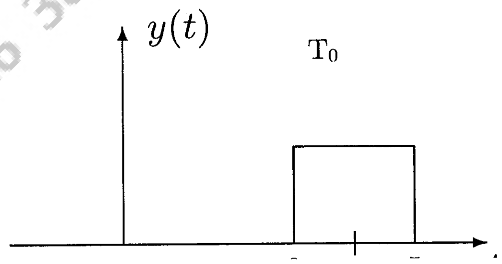
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \; dt = A^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha t} \, dt = \left[A^2 \cdot \frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right]_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha}$$

Segnale Rettangolo

$$x(t) = A \; \mathbf{rect}\left(\frac{T}{T_1}\right)$$



$$x(t)A \; \text{rect}\left(\frac{T - T_0}{T_1}\right) =$$



A è l'altezza mentre T_1 è l'ampiezza del rettangolo. T_0 è il punto in cui è centrato.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} A^2 \, dt = A^2 T_1$$

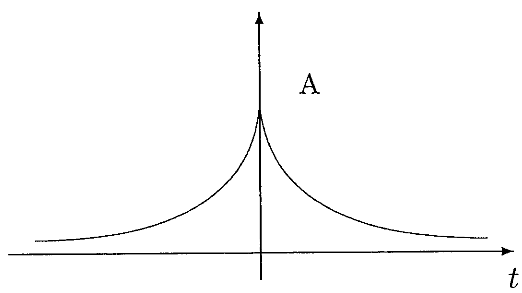
L'energia è quindi finita.

Quando si svolge il quadrato di una rect si ha ancora una rect ma di altezza A^2.

Poiché l'energia è finita allora la potenza $P_x = \varnothing$.

Esponenziale Bilatero Negativo

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{\alpha t} & \alpha > 0 \\ Ae^{-\alpha t} & t < 0 \end{cases}$$



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha|t|}$$