Insieni Numerici

$\mathbb{N}$ → NUMERI NATURALI, INTERI POSITIVI, COMPRESO 0

$\mathbb{Z}$ → NUMERI INTERI, POSITIVI E NEGATIVI,

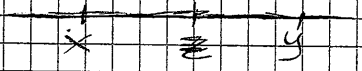
$\mathbb{Q}$ → RAZIONALI, "FRAZIONI" $= \frac{p}{q}$ CON $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$

$\mathbb{R}$ → REALI, $\mathbb{Q}$ + MOLTO ALTRO ES. $\sqrt{2}$, π, e, ...

master copy

Intervalli di $\mathbb{R}$

Def. $I \subset \mathbb{R}$ SI DICE INTERVALLO SE $\forall x, y \in I$ CON $x < y$, DATO z tale che $x < z < y$ RISULTA $z \in I$



NOTAZIONE: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ INTERVALLO CHIUSO

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ INTERVALLO APERTO

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ SEMIRETTA CHIUSA

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ SEMIRETTA APERTA

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

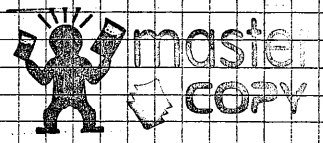
FUNZIONI

- TERNA DI OGGETTI: DUE INSIEMI A = DOMINIO B = CODOMINIO, E UNA LEGGE f
  SI SCRIVE $f: A \to B$

- f METTE IN CORRISPONDENZA OGNI ELEMENTO DI A CON UNO E UN SOLO ELEMENTO DI B

GRAFICO DI f:

$$graph(f) = \{(a,b) \in A \times b : b = f(a)\}$$



DEF (IMMAGINE): DATA $f: A \to B$ e $D \subset A$
$\Rightarrow f(D) = \{f(a) : a \in D\}$ SI DICE IMMAGINE DI D ATTRAVERSO f
e $f(D) \subset B$

DEF (INIETTIVA): DATA $f: A \to B$ SI DICE INIETTIVA SE $\forall a_1, a_2 \in A$ CON $a_1 \neq a_2$
RISULTA $f(a_1) \neq f(a_2)$

DEF (SURGETTIVA): DATA $f: A \to B$ SI DICE SURGETTIVA SE $\forall b \in B \ \exists a \in A$ tale che
$b = f(a)$

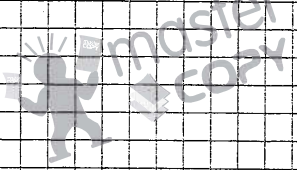
OSSERVAZIONE: $f: A \to B$ È SURGETTIVA $\iff Imag(f) = B$

DEF (BIGETTIVA): DATA $f: A \to B$ SE È SIA INIETTIVA CHE SURGETTIVA SI DICE CHE f È
BIUNIVOCA O INVERTIBILE

POSSO COSTRUIRE $f^{-1}: B \to A$ COME $f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f = Id = IDENTITÀ = X$

FUNZIONE $Id: A \to A$, $Id(a) = a$



FUNZIONI MONOTONE

Def: $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \to B$ se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ risulta

1) $f(x_1) < f(x_2)$ f è STRETTAMENTE CRESCENTE

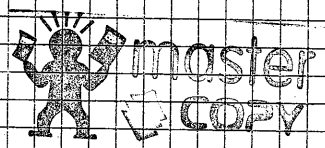
2) $f(x_1) \leq f(x_2)$ f è DEBOLMENTE CRESCENTE

3) $f(x_1) > f(x_2)$ f è STRETTAMENTE DECRESCENTE

4) $f(x_1) \geq f(x_2)$ f è DEBOLMENTE DECRESCENTE

Se si verificano 1 o 3 $\Rightarrow$ f si dice MONOTONA

Se si verificano 2 o 4 $\Rightarrow$ f si dice DEBOLMENTE MONOTONA



master COPY

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI MONOTONE

DATI $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to B$ e $g: B \to C$ allora

1) Se f è CRESCENTE e g è CRESCENTE $\Rightarrow$ $f \circ g$ è CRESCENTE

2) Se f è CRESCENTE e g è DECRESCENTE $\Rightarrow$ $f \circ g$ è DECRESCENTE

3) VICEVERSA

4) Se f è DECRESCENTE e g è DECRESCENTE $\Rightarrow$ $f \circ g$ è CRESCENTE

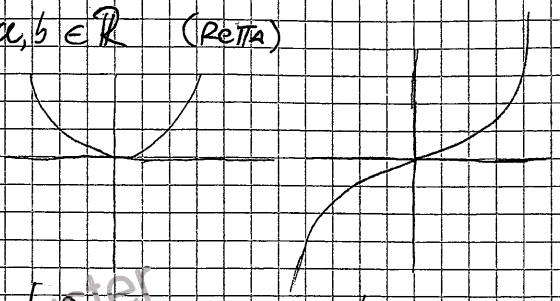
OSSERVAZIONE: Se f è STRETTAMENTE MONOTONA $\Rightarrow$ f è INIETTIVA

master COPY

FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ (RETTA)

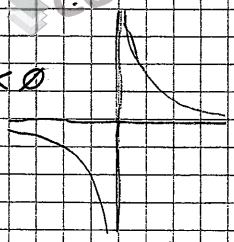
$f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{N}$



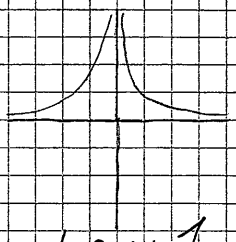
b PARI

b DISPARI

$f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{Z}, b < 0$



b DISPARI: $\frac{1}{x}$



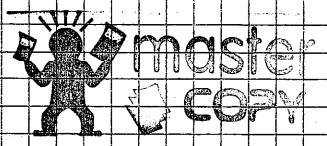
b PARI: $\frac{1}{x^2}$

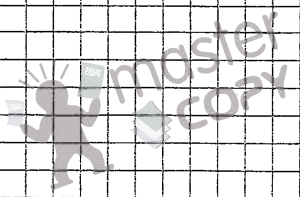
$f(x) = x^{p/q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ e q, p NON ENTRAMBI PARI

$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$

Se q è DISPARI DOM(f) = $\mathbb{R}$

Se q è PARI DOM(f) = $[0, +\infty)$

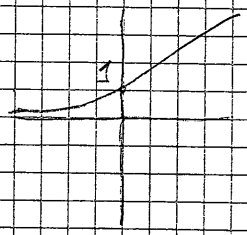




FUNZIONE ESPONENZIALE

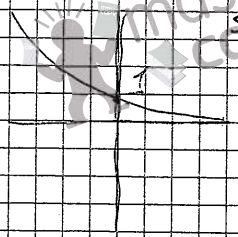
$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ $\quad f(x) = a^x$

Se $a > 1$



STRETTAMENTE CRESCENTE

Se $0 < a < 1$



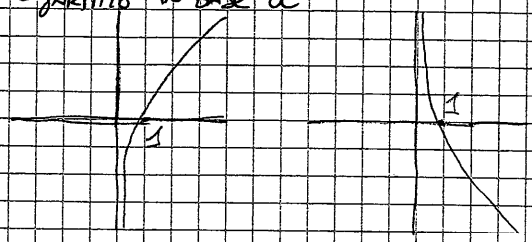
STRETTAMENTE DECRESCENTE

master copy

$a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ f è INVERTIBILE

LA FUNZIONE INVERSA è IL LOGARITMO IN BASE a

$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$



$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$, la sua INVERSA è IL LOGARITMO NATURALE

$f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log x$

CAMBIO DI BASE:

- $\log x = \log_a x \times \log_a a \Rightarrow \log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

- $\log(b \cdot c) = \log b + \log c$

- $\log\left(\frac{b}{c}\right) = \log b - \log c$

- $\log(b^c) = c \log(b)$