SISTEMI MECCANICI:

- di p.ti materiali
- di corpi rigidi
- combinazioni dei due

master COPY

$N$ p.ti materiali $P_1, _, P_N$ di massa $m_1, _, m_N$ in moto libero

Lo spazio ambiente è euclideo $\mathbb{E}^3$, a esso è associato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}^3$ e un prodotto scalare $(\cdot) : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}$, che è bilineare, simmetrico e definito positivo

Si definisce, a partire da un vettore $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$, la NORMA di $\vec{u}$, $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Posso considerare due punti $P, Q \in \mathbb{E}^3$, definiamo la DISTANZA $d(P,Q) = |P-Q|$

$\Rightarrow \quad P - Q \in \mathbb{V}^3$

SPAZIO-TEMPO DI GALILEO $\longrightarrow \quad \mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$

$(P, t)$ evento

$P$: punto, $t$: tempo

master COPY

Possiamo fissare un certo tempo $t$ e osservare gli eventi simultanei $\mathbb{E}^3 \simeq \mathbb{E}^3 \times \{t\} \Rightarrow \mathbb{G} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}^3 \times \{t\}$

$\Rightarrow \tilde{d}((P,t),(Q,t)) = d(P,Q)$

master COPY

PRODOTTO VETTORIALE

$\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$, bilineare, antisimmetrico e soddisfa: (applicazione lineare)

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v}$

**PROPOSIZIONE:**

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale, in questo esistono due soli prodotti vettoriali $x'$, $x''$ i quali risultati differiscono solo per il segno

Data $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ base ortonormale, $\hat{e}_i \in \mathbb{V}^3 \Rightarrow$ $\boxed{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}}$ $\rightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

- $\boxed{\hat{e}_1 \; x' \; \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \qquad \hat{e}_2 \; x' \; \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \qquad \hat{e}_3 \; x' \; \hat{e}_1 = \hat{e}_2}$ → SCEGLIAMO QUESTO (+ COMODO PER I SEGNI)
- $\hat{e}_1 \; x'' \; \hat{e}_2 = -\hat{e}_3 \qquad \hat{e}_2 \; x'' \; \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \qquad \hat{e}_3 \; x'' \; \hat{e}_1 = -\hat{e}_2$

NO DIM.

Noi considereremo solo terne levogire, cioè quelle che seguono la regola della mano destra, cioè $x'$ e lo denoteremo con $x$.

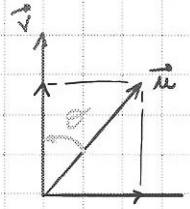
**PRODOTTO VETTORE TRIPLO:**

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (v \cdot \vec{w})\vec{u}$$

**OSSERVAZIONE:** Il prodotto vettore non è associativo

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

$\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ Scomposizione di $\vec{u}$ come combinazione lineare di due vettori ortogonali, uno dei quali è parallelo a $\vec{u}$




$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|^2}\left[(\vec{u} \cdot \vec{v})\cdot\vec{v} + \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v})\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|^2}\left[(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2\cdot\vec{u} - (\vec{v}\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}\right] = \frac{1}{|\vec{v}|^2}|\vec{v}|^2\cdot\vec{u} = \vec{u}$$

$$\vec{v}\times\vec{a}\cdot\vec{v} = 0 \quad , \quad \vec{v}\times\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$$

$$\vec{v}\times\vec{a}\cdot\vec{v} = \underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{=0}\cdot\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\times(\vec{u}\times\vec{v}) \ \grave{e} \ \perp \vec{v}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta.$$

Consideriamo due vettori $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

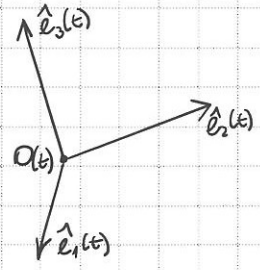
si definisce $x\cdot y = \sum_{h=1}^{3} x_h y_h$ e $x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 + x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)e_3$

↑ prodotto scalare

# SISTEMI DI RIFERIMENTO

Un sistema di riferimento $\Sigma$ è una mappa $t \longmapsto \Sigma(t) = (O(t), \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t))$

$O(t) \in \mathbb{E}^3$, $\hat{e}_i(t) \in \mathbb{V}^3$




$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$

master COPY

Dato un sistema di riferimento possiamo rappresentare un p.to in coordinate.

$\Rightarrow$ se $P \in \mathbb{E}^3 \Rightarrow \Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ $\quad \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \in \mathcal{B}$ base di $\mathbb{V}^3$

Il vettore $P-O \in \mathbb{V}^3 = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{e}_i \in \mathbb{V}^3$

Considero il vettore $x_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad x_1, x_2, x_3$ sono le coordinate di $P$ in $\Sigma$

ovvero le coordinate del vettore $P-O$ in $\mathcal{B}$

master COPY

## DESCRIZIONE DEL MOTO DI UN PUNTO P

$\hookrightarrow \quad t \longmapsto P(t) \in \mathbb{E}^3$

Fisso $\Sigma$ sist. di rif., posso descrivere la posizione di $P$ come $\vec{x}_P = P-O = \sum_{i=1}^{3} x_i(t) \hat{e}_i$ (In generale dipendono dal tempo)

Se le $x_i(t)$ sono derivabili due volte $\Rightarrow$

master COPY

VELOCITÀ $\quad \vec{v}_P = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \hat{e}_i = \frac{d}{dt}(P-O)\Big|_{\Sigma} \in \mathbb{V}^3$,

ACCELERAZIONE $\quad \vec{a}_P = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \hat{e}_i = \frac{d^2}{dt^2}(P-O)\Big|_{\Sigma} \in \mathbb{V}^3$.

$\mathbb{R}^3 \ni x_P = (x_1, x_2, x_3)^t$, $\quad \mathbb{R}^3 \ni v_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^t$, $\quad \mathbb{R}^3 \ni a_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)^t$

## EQUAZIONI DEL MOTO per un sistema di $N$ punti materiali liberi

**FORZE:** $\vec{F}_i$ agisce su $P_i$

Fissato $\Sigma$, $\vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t)$ in generale

↓ non può essere funzione delle accelerazioni, solo di $x, \dot{x}$ e $t$

Assumiamo che valgano le equazioni di Newton, cioè se i p.ti hanno massa $m_i$

$\Rightarrow \quad m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i(\vec{x}, \vec{v}, t) \qquad i = 1, \dots, N$

dove $\vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$, $\vec{v} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$

oppure in coordinate $\boxed{m_i \ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t)}$ $\quad i = 1, \dots, N$

eq. diff. del 2° ordine

Riduzione a sistema del 1° ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \dfrac{F_i}{m_i}(x, v, t) \end{cases} \qquad i = 1, \dots, N, \quad v = (v_1, \dots, v_N)$$

$\Rightarrow$ posso usare il teor. di Cauchy - Lipshitz (esistenza e unicità della soluzione di un'equazione diff.)

**Esempio:**

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -y\dot{x} \\ m\ddot{y} = x^2 + x\dot{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v \\ m\dot{v} = -yv \\ \dot{y} = w \\ m\dot{w} = x^2 + xw \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{y}{m}v \\ \dot{y} = w \\ \dot{w} = \frac{x^2 + xw}{m} \end{cases}$$

master COPY