Questi sono gli appunti delle lezione di meccanica razionale dell'anno 2018/2019 (nota: da tale anno il programma è un po' cambiato rispetto agli anni precedenti), svolte dai professori Gronchi e Baù.

Sono stati controllati e ricopiati, con aggiunte dal libro del Mattei. Le lezioni non ricopiate sono presenti nelle note del professore (che trovate sul suo sito http://adams.dm.unipi.it/~gronchi/), in vista del fatto che a lezione sono state spiegate allo stesso modo.

Per l'esame scritto consiglio di svolgere tutte le prove del 2019 (presenti in fondo agli appunti con la soluzione) e quelle a venire. Oltre a queste di svolgere gli esercizi fatti a lezione e quelli degli anni passati (che trovate sul sito del professore con la soluzione) che vi sembrano utili, per esempio io ho fatto:
- primo e secondo esercizio del 15/02/18
- primo e secondo esercizio del 11/04/18
- secondo esercizio del 5/06/18
- primo e secondo esercizio del 26/06/18
- primo e secondo esercizio del 17/07/18

Per l'esame orale studiarsi bene le note del professore e le dimostrazione che vi sono (consiglio per chi ha preso un voto alto allo scritto di farsi bene il capitolo 1 e 9).

Consiglio in ogni caso di seguire le lezioni.

master COPY

master COPY

master COPY

Stanza 120 DH

http://adams.dm.unipi.it/~gronchi 27/09/18

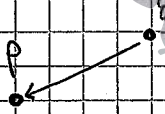
Sistemi meccanici (capitolo 1)

↳ studio del moto di punti materiali, corpi rigidi e sistemi articolati.

moto unidimensionale ⊙—⊙

N punti materiali che si muovono liberi nello spazio euclideo reale e tridimensionale $\mathbb{E}^3$, $t \in \mathbb{R}$ tempo reale.

Avere uno spazio euclideo significa avere uno spazio affine con prodotto scalare $\cdot$ tra due vettori.



$P - Q \in \mathbb{V}^3$ spazio vett. associato
$P, Q \in \mathbb{E}^3$

prodotto scalare $\cdot : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}$ è un app. bile. simm. definita positiva
↳ cioè $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ è vero a meno che $\vec{u}$ non sia $= 0$.

norma su $\mathbb{V}^3$: $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

distanza tra punti di $\mathbb{E}^3$ $P, Q \in \mathbb{E}^3$
$d(P,Q) = |P-Q|$

Lo spazio-tempo di Galileo è il prodotto cartesiano tra punti e un tempo e ci dà gli eventi.

$\mathcal{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ (P,t) posso scrivere $\mathbb{E}^3 \times \{t\}$ spazio di eventi simultanei.
$\mathbb{E}^3 \times \{t\} \cong \mathbb{E}^3$ perché è $\mathbb{E}^3$ per un punto, quindi ritorniamo le stesse caratteristiche di $\mathbb{E}^3$.

$d((P,t),(Q,t)) = d(P,Q)$

↳ perché non ha senso fare la distanza tra eventi non simultanei.

prodotto vettoriale $\times : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ app. bile. simm. $\to \hat{e}_j \times \hat{e}_j = 0$

proprietà:

i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3 / \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$

ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ si ha $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$ prodotto misto

↳ dimostro il primo risultato usando esplicitamente gli elementi

Ci sono due prodotti vettori $\times_1$; $\times_2$:

Data $\{\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3\}$ base ortonormale di $\mathbb{V}^3$ $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ (Kronecker) $\begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

questi due prodotti vettori si distinguono per le proprietà:

$\hat{e}_1 \times_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad \hat{e}_2 \times_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \quad \hat{e}_3 \times_1 \hat{e}_1 = \hat{e}_2$ con $\times_1$

$\hat{e}_1 \times_2 \hat{e}_2 = -\hat{e}_3 \quad \hat{e}_2 \times_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \quad \hat{e}_3 \times_2 \hat{e}_1 = -\hat{e}_2$ con $\times_2$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \sum_{h,j=1}^{3} u_j v_h \, \hat{e}_j \times \hat{e}_h$$

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{3} u_j \hat{e}_j$$

$$\vec{v} = \sum_{h=1}^{3} v_h \hat{e}_h$$

→ base $\{\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3\}$ è levogira se vale $\times_1$ → uso questa convenzione

prodotto triplo $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ → attenzione a come mette le parentesi.

$u, v \in \mathbb{R}^3 \quad u = (u_1; u_2; u_3) \quad v = (v_1; v_2; v_3)$

$$u \cdot v = \sum_{j=1}^{3} u_j v_j \qquad u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\hat{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\hat{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\hat{e}_3$$

Altro strumento per la descrizione del moto sono i sistemi di riferimento: $t \mapsto \{O(t); \hat{e}_1(t); \hat{e}_2(t); \hat{e}_3(t)\}$

$\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ con $\hat{e}_i$ che sempre una dipendenza dal tempo.

$\mathbb{R} \to \mathbb{E}^3 \times (\mathbb{V}^3)^3$

$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$

Li possiamo vedere come fissare un sistema del tempo che ci permette di passare da un punto a una terna di vettori ortonormali.

Grazie a questi sistemi posso avere una rappresentazione in coordinate: a punto che metto in corrispondenza biunivoca con un vettore.

$$\mathbb{E}^3 \ni P \overset{\text{c.b.}}{\longleftrightarrow} P - O = \sum_{j=1}^{3} x_j \hat{e}_j \longleftrightarrow (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$$

$\uparrow$ $\mathbb{V}^3$

Descrivere il moto: $\Sigma' = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

$t \longmapsto P(t)$ quando derivo un vettore in un sistema di riferimento mobile devo: rappresentare il vettore come combinazione dei vettori di quella base, e poi ne derivo solo i coefficienti.

$P-O = \sum x_j \hat{e}_j$ posizione di P in Σ'

$\vec{v} = \frac{d}{dt}(P-O)\Big|_{\Sigma}$ velocità di P in Σ' $\left(\vec{v} = \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \hat{e}_j\right)$ i versori non li derivo poiché sono costanti

$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}(P-O)\Big|_{\Sigma}$ accelerazione di P in Σ'

$(x_1; x_2; x_3) = x \in \mathbb{R}^3$

$(\dot{x}_1; \dot{x}_2; \dot{x}_3) = v \in \mathbb{R}^3$

$(\ddot{x}_1; \ddot{x}_2; \ddot{x}_3) = a \in \mathbb{R}^3$

Equazioni del moto: applicando le forze; F_i che agisce su un punto i dipende dal Σ scelto. Assumo che se ho un sistema di N punti, allora le forze possono dipendere solo da:

- la posizione di tutti i punti $\vec{x}$
- la loro velocità $\vec{v}$
- il tempo t

$\vec{F}_i$ su P_i con $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{x}; \vec{v}; t)$

posizione $\rightarrow \vec{x} = (\vec{x}_1; \dots; \vec{x}_N)$

velocità $\rightarrow \vec{v} = (\vec{v}_1; \dots; \vec{v}_N)$

Le forze in gioco non dipendono dall'accelerazione del sistema di riferimento scelto.