29/09

http://adamo.dm.unipi.it/~gbardi CI SONO ALCUNE PROVE D'ESAME SVOLTE

SISTEMI MECCANICI

Sono formati da punti materiali, corpi rigidi o combinazioni

Possono essere vincolati o non

Il caso più semplice è quello di n punti materiali

$P_1 \to P_N$ ciascuno dotato di una massa, e c'è un moto libero su questi $m_1 \to m_N$ punti

SPAZIO AMBIENTE

È euclideo e tridimensionale E^3, è un caso particolare di spazio affine V^3 associato. Tra le proprietà c'è un prodotto scalare

$V^3 \times V^3 \to R$ bilineare, simm. e definita positiva

Grazie a questa proprietà introduciamo la norma

$\vec{u} \in V^3$ $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ NORMA di $\vec{u}$

Possiamo considerare due punti $P, Q \in E^3$

$d(P,Q) = |P - Q|$ DISTANZA TRA P, Q

La differenza tra $P - Q \in V^3$ appartiene allo spazio associato

SPAZIO TEMPO DI GALILEO

$G = E^3 \times R$ ci da modo di introdurre sistemi di riferimento inerziali

(P, t) Ci sono le coppie punto e tempo

Potremmo pensarle a "fibre" $E^3 \times \{t\}$ come eventi simultanei

$G = \bigcup_{t \in R} E^3 \times \{t\}$

L'insieme degli eventi simultanei è isomorfo

$\tilde{d}((P,t),(Q,t)) = d(P,Q)$

C'è anche un prodotto vettoriale, cioè un applicazione

$V^3 \times V^3 \to V^3$ bilineare, antisimmetrica

e valgono le proprietà

i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$

ii) $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$

CON SOLUZIONI PROVE GEN - FEB 2020

PROPOSIZIONE

Esistono 2 prodotti vettoriali X_1, X_2 il cui risultato differisce solo per il segno.

Scelta una base ortonormale $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$

$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ (delta i, j)

questo può dare

1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$ $\quad e_i \in V^3$

Cioè ad esempio

$\hat{e}_1 \times_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \qquad \hat{e}_2 \times_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \qquad \hat{e}_3 \times_1 \hat{e}_1 = \hat{e}_2$

Usando invece il prodotto vettoriale $\times_2$

$\hat{e}_1 \times_2 \hat{e}_2 = -\hat{e}_3$ ecc...

Utilizzeremo solo TERNE LEVOGIRE (e quindi vale la regola della mano destra)

Scegliamo quindi X_1 e lo indicheremo con il solo $\times$

PROPRIETÀ

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$

il prodotto vettore non è associativo

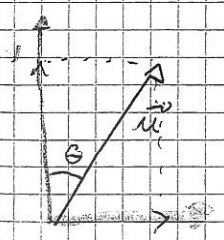
$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ e quindi questi due sono sbagliati

$(1) \cdot (3)\,) \cdot (2) - (2)\,(3)\,) \cdot (1)$

è la regola di svolgimento di questo prodotto scalare

Dato $\vec{v} \in V^3$, $\vec{u} \in V^3$

Posso scomporre $\vec{u}$ come comb. lineare di $\vec{u}$ e 2 vettori ortogonali di cui uno dei quali è $\parallel \vec{u}$



- Prendo la proiezione di $\vec{u}$ su $\vec{v}$ e
- La proiezione di $\vec{u}$ sul vettore ortogonale a $\vec{v}$

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|^2}\left[(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} + \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v})\right]$$

$$|\vec{v}|^2 \cdot \vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{v}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|^2} \cdot |\vec{v}|^2 \vec{u} = \vec{u}$$

Quel prodotto è proprio quello ortogonale a $\vec{v}$, sfruttando l'angolo

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Questa relazione sfruttata con quella di prima

$$\cos^2\theta = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2} \Rightarrow |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cos^2\theta = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sqrt{1 - \cos^2\theta} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$$

Per adesso considero i vettori di R^3,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot Y = \sum_{h=1}^{3} x_h y_h \quad \Rightarrow \quad e \quad X \times Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\, e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\, e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, e_3$$

Con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e_1 \times e_2 = e_3 \qquad e_2 \times e_3 = e_1 \qquad e_3 \times e_1 = e_2$$

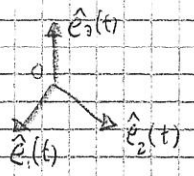
SISTEMI DI RIFERIMENTO

Lo indico con Σ e lo considero come una mappa

$$t \to \Sigma(t) = \left(O(t), \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t) \right)$$

$\in E^3$

Abbiamo tre versori dipendenti dal tempo



e un punto di origine O che dipende dal tempo

E vale quello di prima $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$

Posso rappresentare in coordinate i vari punti dello spazio euclideo

Dato $P \in E^3$ $\qquad \Sigma = O\, \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$

Ottengo la posizione da $\qquad \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \in B$

$P - O \in V^3$

Esiste ed è unica la rappresentazione di $P - O$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \hat{e}_i \in V^3$$

Adesso considero il vettore $x_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$ e queste sono proprio le coordinate

P in Σ_i

DESCRIZIONE DEL MOTO

Vuol dire fornire una mappa che mi dica dov'è il punto in ogni istante

$t \to P(t) \in E^3$

Fisso Σ_i di riferimento la posizione di P

$\vec{x}_P = P - O = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{e}_i$ è dipendente dal tempo

Se $\vec{x}_P$ è derivabile due volte posso definirne la velocità derivando il solo x_i

$\vec{v}_P = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \hat{e}_i = \frac{d}{dt}(P-O)\Big|_{\Sigma}$ VELOCITÀ

$\vec{a}_P = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \hat{e}_i = \frac{d^2}{dt^2}(P-O)\Big|_{\Sigma}$ ACCELERAZIONE

Possiamo rappresentarle in coordinate

$\mathbb{R}^3 \ni x_P = (x_1, x_2, x_3)^T$ in quanto è un vettore colonna

$\mathbb{R}^3 \ni v_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$ T sta per trasposta

$\mathbb{R}^3 \ni a_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)^T$

EQUAZIONE DEL MOTO

Introduciamo le forze per un sistema di N punti materiali

$P_1 \to P_N$, $\vec{F}_i$ agisce su P_i

$\vec{F}: (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \dots \vec{v}_N, t)$

è non può essere in funzione dell'accelerazione, sono dette anche FORZE ATTIVE.

Per sapere come sono fatte devo fissare un sistema di riferimento

Supponiamo inoltre che valgono le equazioni di Newton

Se i punti hanno masse m_i

Vale $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i(\vec{x}, \vec{v}, t)$

$\vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$

$\vec{v} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$

Oppure in coordinate

$m_i \ddot{x}_i = F_i(m, x, t)$

È un eq. del secondo ordine e voglio ridurmi al primo

Introduco

$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ m_i \dot{v}_i = F_i(x, v, t) \end{cases}$ e quindi dove $v = (v_1 \dots v_N)$

Posso poi portare al denominatore m_i

$$\dot{v}_i = \frac{F_i}{m_i}(x, v, t)$$

È utile per ricondurmi al teorema di Cauchy

$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \\ t = 0 \end{cases}$ $f \in C^1$ allora esiste un unica soluzione

ESEMPIO

$m\dot{x} = -yx$ | introduco v e w

$m\dot{y} = x^2 + xy$ | $\dot{x} = v$ e $\dot{y} = w$

$m\dot{v} = -yv$ successivamente ci $\Rightarrow$ $\dot{v} = -\frac{yv}{m}$ $\dot{w} = \frac{x^2 + xw}{m}$

$m\dot{w} = x^2 + xw$ divido per m

SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI

Ogni corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme (CANALE)

introduco LE TRASFORMAZIONI DI GALILEO

Sono le trasformazioni nello spazio di Galileo (eventi simultanei)

Trasformazioni affini dello spazio di Galileo che conservano intervalli di tempo tra 2 eventi (con orientazione) e la distanza tra eventi simultanei

di $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

$O(3)$ è l'insieme delle matrici di ordine 3 che $\leftarrow$ MATRICE ORTOGONALE

$= \{ A \in M_m(3) : AA^T = A^TA = I \}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Introduco un altro insieme $SO_n(3)$ gruppo speciale ortogonale

Le matrici A di $O(3)$ con determinante $A = 1$

$\det(AA^T) = \det(I)$

$O(3) = \{ A : AA^T = A^TA = I \}$

$SO(3) \subseteq O(3)$ $\det A$

$\det(AA^T) = (\det A)^2 = 1$ quindi $\det A = \pm 1$