Definizioni

DEF (Struttura Algebrica)

- Coppia $(S, *_1 \dots *_n)$ $\Longrightarrow$ $(S, *_1 \dots *_n)$ è una struttura algebrica
- S insieme sostegno
- $*_n$ operazioni: Nullarie, Unarie, Binarie
  con proprietà possibili: commutativa, associativa, distributiva

DEF (Varietà differenziabile)

X, insieme dotato di Topologia che localmente si può mettere in corrispondenza con $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

X varietà differenziabile

master copy

master copy


master
COPY


master
COPY


master
COPY

Definizioni

Def (Gruppo)

G insieme $\neq \emptyset$; $*$ operazione binaria tc $\Longrightarrow$ $(G,*)$ è un gruppo

0) • $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 * g_2 \in G$

1) $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$, $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ (associatività $*$)

2) • $\exists$ e unico tc $g * e = e * g = g$, $\forall g \in G$ (elem neutro)

3) $\forall g \in G$, $\exists$ $g^{-1} \in G$ unico tc $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$ (esist. inverso)

4) $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ $\Longrightarrow$ $(G,*)$ gruppo abeliano

Def (sottogruppo)

$(G,*)$ gruppo $\Longrightarrow$ $(S,*)$ è un sottogruppo di $(G,*)$

$S \subseteq G$ tc $(S,*)$ gruppo

Def (Sottogruppo Normale [invariante])

• S sottogruppo di G tc $\Longrightarrow$ $(S,*)$ è un sottogruppo normale di $(G,*)$

• $\forall g \in G, \forall s \in S$,

$g * s * g^{-1} \in S$

Def (Gruppo Semplice)

• $(G,*)$ gruppo tc $\Longrightarrow$ $(G,*)$ gruppo semplice

$\nexists H$ tc $\begin{cases} (H,*) \text{ sottogruppo normale} \\ H \neq \{e\}, G \end{cases}$

Def (Gruppo semi semplice)

• $(G,*)$ gruppo tc $\Longrightarrow$ $(G,*)$ gruppo semi-semplice

• $\nexists H$ tc $\begin{cases} (H,*) \text{ sottogruppo normale abeliano} \\ H \neq \{e, G\} \end{cases}$

Def (omomorfismo)

master COPY

DEF (Insieme di Indici) per una famiglia di insiemi

T insieme tc. $\forall \alpha \in T$, $\exists A_\alpha \in F = \{A_\alpha\}$ famiglia di insiemi $\Longrightarrow$ T è un insieme di indici per la famiglia F

- $T \neq \emptyset$

DEF (Relazione di Equivalenza)

$\sim$ relazione Binaria tc $\forall a,b,c \in A$: $\Longrightarrow$ $\sim$ relazione di equivalenza su A

1) $a \sim a$ (riflessiva)
2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (simmetria)
3) $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (transitiva)

DEF (Classe di equivalenza)

A insieme, $\sim$ Relazione di equivalenza su A $\rightarrow$ $cl(a) \equiv \{x \in A \text{ tc } a \sim x\} \equiv$ classe di equivalenza di $a \in A$
$a \in A$

DEF (APPLICAZIONE)

S e T insiemi $\neq \emptyset$, $M \subseteq S \times T$ tc. $\Longrightarrow$ M è un'applicazione da S a T

$\forall s \in S \; \exists! \, t \in T$ tc $(s,t) \in M$

DEF (APPLICAZIONE SU UN insieme) [suriettiva]

applic. $\tau : S \to T$ tc $\Longleftrightarrow$ τ applicazione da S su T (suriettiva)

$\forall t \in T$, $\exists s \in S$ tc $t = s \cdot \tau$

ovvero $Img(\tau) = T$

iniettive

- τ applic. da S in T tc $\Longleftrightarrow$ τ applic da $S \to T$ iniettiva

$s_1 \neq s_2 \Rightarrow s_1 \tau \neq s_2 \tau$

$\forall s_1, s_2 \in S$

DEF (Applicazioni uguali)

σ e $\tau : S \to T$ applic tc $\Longleftrightarrow$ $\sigma = \tau$

$s\sigma = s \cdot \tau \;\; \forall s \in S$

DEF (APPLICAZIONE COMPOSTA o PRODOTTO)

$\sigma : S \to T$, $\tau : T \to V$ $\Longleftrightarrow$ $\sigma \circ \tau$ applic composta $\tau(\sigma(s))$

$\sigma \circ \tau : S \to U$ tc

$s(\sigma \circ \tau) = (s\sigma)\tau \;\; \forall s \in S$

DEF (Insieme delle corrispondenze biunivoche su se stesso)

S insieme $\neq \emptyset \Rightarrow A(S) \equiv \{\sigma : S \to S \text{ tc. } \sigma \text{ è biunivoca}\}$

DEF MCD

$c, c_2, a, b \in \mathbb{Z}$ tc

$\Leftrightarrow c \equiv MCD(a,b)$

1) c è un divisore di a e di b

2) $\forall c_2$ divisore di a e $b \Rightarrow c$ è divisore di c_2

DEF (Interi relativamente primi)

$MCD(a,b) = 1 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{Z}$ relativamente primi

DEF (Numero primo)

$p \in \mathbb{Z}$, $p > 1 \Leftrightarrow p$ è primo

divisori $(p) \equiv \{\pm 1, \pm p\}$

DEF (Congruenza modulo n)

$n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ tc $\Leftrightarrow a \equiv b \bmod n$

$n \mid (a-b)$

DEF (Ordine di un gruppo)

$\#(G) \equiv o(G) \equiv$ ordine del gruppo G.

DEF (Gruppo Simmetrico di grado n)

$(S_n, \circ)$ gruppo tc $o(S_n) = n! \Rightarrow S_n \equiv$ gruppo simmetrico di grado n

$S_n = A(S)$

$\#(S) = n$

DEF (Congruenza rispetto ad un sottogruppo)

$(G, *)$ gruppo,

$(H, *)$ sottogruppo di G $\Leftrightarrow a \equiv b \bmod H$

$a, b \in G$, $ab^{-1} \in H$

DEF (Classe laterale destra)

$(H, *)$ sottogruppo di $(G, *)$ $\Leftrightarrow Ha$ laterale destro di H in G

$a \in G$, $Ha = \{h * a \text{ tc. } h \in H\}$

DEF (Indice di un sottogruppo)

$(H, *)$ sottogruppo di $(G, *)$, $I_G(H) \equiv \#([H\backslash G])$, con $Ha_i \cap Ha_j = \emptyset$ se $i \neq j$

se $(G, *)$ finito $\Rightarrow I_G(H) = \frac{o(G)}{o(H)}$

DEF (Periodo di un elemento)

$(G, *)$ gruppo, $a \in G$

$m \in \mathbb{N}$ tc. $m = \min_{m \in \mathbb{N}} (a^m = e)$ $\Leftrightarrow m$ è il periodo di a (o ordine)

$m = o(a)$