Lezione 01 — Teoria dei Processi — 01/03/2021

dispense disponibili su elearning (eventuali ricerche di volte in volte)

password: compro

lezioni scaricabili su elearning

dispense del 1° livello su elearning con password "elekio"

Le Basi

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad U \in \mathbb{R}^r,\ X \in \mathbb{R}^n,\ Y \in \mathbb{R}^m \quad A_{n\cdot n},\ B_{n\cdot r},\ C_{m\cdot n},\ D_{m\cdot r}$$

equazioni dello spazio sono differenziali mentre le equazioni delle uscite sono lineari.

Noi vedremo modelli lineari il sistema otterremo equazioni algebriche matriciali lineari.

Per sistemi LTI è possibile calcolare in forma esplicita la funzione di stato

- Consideriamo ancora il caso SCALARE:

Il comportamento della soluzione dipende dal segno e dal valore di a (questo può essere sviluppato in serie)

$x(t) = x_0 e^{at}$ (soluzione del caso scalare)

- Consideriamo adesso il caso VETTORIALE:

Soluzione equazione vettoriale $x(t) = e^{At} x_0$ (esponenziale di matrice ⇓ matrice di transizione)

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \dots + A^r\frac{t^r}{r!}$$

(sviluppo in serie di una esponenziale matriciale)

OSS: gli esponenziali possono essere sviluppati sotto forma di serie

- Calcolo di e^{At}: Le equazioni dei modi ogni termine è combinazione lineare e coefficienti costanti di termini del tipo:

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ t^{\alpha_1-1}e^{\lambda_1 t},\ \dots,\ e^{\lambda_k t},\ \dots,\ t^{\alpha_k-1}e^{\lambda_k t}$$

OSS: l'esponenziale di matrice viene chiamata anche MATRICE DI TRANSIZIONE e determina la risposta del moto libero.

Questi termini elementari prendono il nome di MODI del sistema e caratterizzano il moto libero.

Evoluzione dello stato: soluzione completa anche con ingressi

$\dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ (qui ho la soluzione libera può che provate

$$X(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{MOTO LIBERO}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}_{\text{MOTO FORZATO}} \quad \text{(formula di Lagrange)}$$

Noi preferiamo lavorare nello spazio delle trasformate per poterne ho equazioni differenziali e equazioni algebriche, per poi antitrasformare e ritornare nel dominio tempo

Anziché risolvere direttamente le eq. differenziali, le trasformo in equazioni algebriche, risolvo questo sistema di equazioni e antitrasformo per ritornare nel dominio del tempo

- Trasformata di Laplace (sistemi tempo continuo) => eq differenziali

La trasformata di Laplace è una funzione complessa $F(s)$ di variabile complessa $s = \alpha + j\omega$ così definita:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

condizione di convergenza $\int_0^{+\infty} |f(t) e^{-st}| dt < \infty \quad \forall s \in I$

Nel nostro caso: $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ (se il modulo della f(t) viene limitato da una esponenziale crescente tramite opportuni valori di M e α)

Es: • e^{t^3} => NO una • t^2 => Si Laplace

- La z trasformata (sistemi tempo discreti) => eq alle differenze

(Si usano per studiare delle successioni di valori campionate e portare che un segnale continuo)

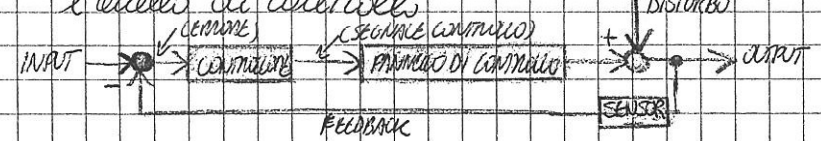
$$\mathcal{Z}\{f(t)|_{t=kT}\} = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot z^{-k} = F(z) \Rightarrow$$ è una serie e quindi non converge sempre

criterio di convergenza: $|f(k)| \leq \varrho^k \quad \forall k \ (\varrho > 0)$ è limitata da una potenza (successione di valori)

- Teoria del Feed Back

Questa è la teoria della controreazione negativa (vedi esempio dell'isolatore e scritto nelle slide)

oss nell'esempio è il pellegrinante che svolge il ruolo di feedback, chiudendo l'anello di controllo



- Funzione trasferimento di un anello chiuso



$\frac{G}{1+GH}$ (catena diretta) (guadagno ad anello)

- Relazioni ingresso uscita tramite funzione $G(s) = \frac{k(\tau_0 s+1)\cdots}{(\tau_1 s+1)\cdots}$ (Forma di Bode)

(zeri) (poli)

oppure

$G(s) = \frac{b_m(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdots}{a_n(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$ (Forma di Evans)

Nelle generiche MiMo avremo degli scalari una delle matrici (es $G(s)$).

poli e zeri ci permettono quando volta di poter effettuare delle cancellazioni

Quando è possibile effettuare la cancellazione?

=> Nelle zone di regione stabile

1) Dominio Laplace => posso cancellare poli e zeri che parte reale positiva o che stanno sull'asse

2) Dominio Zeta => non posso cancellare poli e zeri che sono esterni alla circonferenza unitaria e o che sono proprio sulla circonferenza unitaria nel piano di gauss

oss: se uno zero è uguale a un polo che una cancellazione

In base a dove sono situati i poli abbiamo la stabilità o meno (più sono vicini all'asse immaginario più influiscono sulla stabilità del nostro sistema di controllo):
poli con parte reale <0 → stabilità
Nel piano di Gauss possiamo vedere se la reazione sarà più veloce o meno e/o più oscill.
oss: immaginare è la componente immaginaria e immaginare invece il sistema oscillerà.
oss: poli più vicini all'asse immaginario → sistemi più lenti;
poli più lontani dall'asse immaginario → sistemi più veloci;
Gli zeri non influiscono sulla stabilità degli zeri (in generale)
Sicuramente quando abbiamo uno zero sull'asse reale+ e un impulso un predino, otteniamo una risposta inversa in uscita (predino negativo)

Spazio degli stati → Funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

se conosciamo le matrici A B C D siamo subito in grado di scrivere la funzione di trasferimento nel dominio s

$$= \frac{N(s)}{d(s)}$$

Stabilità ← (equazione caratteristica $d(s) = 0$) ⇒ le radici di questo dipendono dagli autovalori di A

Data una funzione di trasferimento, la stabilità ci indica che questa funzione convergerà ad un certo valore.
Ci sono varie tipologie di stabilità
- STABILITÀ BIBO = se ho ingressi limitati e uscite limitate (tipica dei sistemi lineari) → se essere è lineare devo trovare un punto di lavoro
- STABILITÀ ASINTOTICA = quando le variabili partono da un valore e vanno verso un valore ben definito, senza oscillare
- STABILITÀ MARGINALE = quando abbiamo poli con $m.d = 1$ e immaginari puri avrò quando abbiamo un comportamento oscillante senza assestarsi su un valore definito

A noi interessa la stabilità nei sistemi a ciclo chiuso (quello a ciclo aperto è semplice, basta analizzare il segno del polinomio al denominatore)
Vogliamo capire dei criteri che mediante lo studio dei sistemi a ciclo aperto, ci possano dire qualcosa quando chiudiamo l'anello in feedback.
Esistono dei metodi per studiare la stabilità:

- Routh;
- Criterio delle radici;
- Nyquist;
- Bode;

Criterio di Routh

parte dell'espressione del denominatore è vale sia per ciclo aperto che chiuso

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad \text{dove } a_n > 0$$

Vedo e valutare i coefficienti del polinomio senza calcolare e risolvere l'equazione
Questo vale vale quando è presente nel sistema un tempo di ritardo

- condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica:

1) tutti gli $n+1$ coefficienti del polinomio devono avere lo stesso segno

2) gli $n+1$ elementi della prima colonna della tabella di Routh devono avere lo stesso segno

oss: se vale solo 1) → condizione necessaria ma non sufficiente

Per esempio sulle slide.

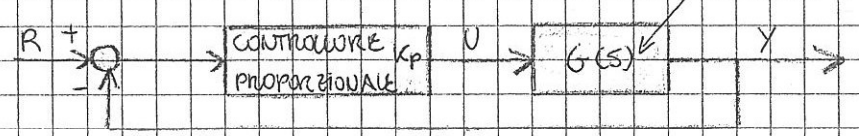
(21.29.00)

- Il luogo delle radici ⇒ serve sempre per calcolare la stabilità

Come studiare nel piano complesso la posizione dei poli negativi del sistema a catena chiusa, a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta ($G(s)$)

Il luogo delle radici permette una analisi grafico-visuale della variazione dei poli in catena chiusa al variare di uno o più parametri (eventualmente introdotti dal controllore)

oss: è migliore rispetto a Routh perché qui due informazioni si deve solo calcolare i poli e guardo passo nulla valuto se la risposta è veloce o meno e se è oscillante o meno



$G(s) = K \frac{n(s)}{d(s)}$ = funzione di trasferimento a catena aperta

ora scrivo la funzione a catena chiusa

$$W(s) = \frac{K \cdot n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)} \quad \text{oppure} \quad \frac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p \cdot G(s)}$$

A noi interessa studiare o studiare il polinomio al denominatore

eq caratteristica = $d(s) + K \cdot n(s) = 0$

Il luogo delle radici mi indica graficamente come variano le radici del polinomio, al variare di K che potrebbe essere la mia variazione del coefficiente di proporzionalità K_p del controllore proporzionale.

Il luogo delle radici si risolve mediante opportune regole:

1) REGOLA 1 = il numero di radici a ciclo chiuso è uguale al numero di poli della funzione a ciclo aperto

il numero di rami del luogo delle radici è uguale al numero di poli della funzione di trasferimento a ciclo aperto

$d(s) + K \cdot n(s) = 0$ = la riscrivo come ⇒ $\frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K}$

~~Criteri sui luoghi di Bode~~ (dopo)

Ritornando al luogo delle radici: (questi sono da vedere nel piano di Gauss)

condizioni di fase $\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi & \text{se } K>0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi & \text{se } K<0 \end{cases}$

condizione sul modulo $\Rightarrow \left|\frac{n(s)}{d(s)}\right| = +\frac{1}{|K|}$ (con questo posso tarare il luogo delle radici)

al variare di s posso studiare e vedere come si comporta il luogo delle radici (in realtà uso il fattore K che mi permette di far passare il luogo delle radici nel punto s di mio interesse)

REGOLA 2) $\Rightarrow$ Il luogo parte per $K=0$, dai poli a ciclo aperto

REGOLA 3) $\Rightarrow$ il luogo evolve sino a terminare per $K=\pm\infty$, sugli zeri a ciclo aperto al finito o all'infinito

REGOLA 4) $\Rightarrow$ se $K>0$, appartengono al luogo delle radici, tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero dispari di singolarità

REGOLA 5) $\Rightarrow$ se $K<0$, appartengono al luogo delle radici, tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero pari di singolarità (oss: 0 è un numero pari)

Osservazione = Il luogo delle radici è SIMMETRICO rispetto all'asse reale.

REGOLA 6) $\Rightarrow$ Il luogo delle radici ha rami che man si sovrappongono mai; al massimo si incrociano in punti singolari detti PUNTI MULTIPLI

Regola pratica sugli angoli di partenza degli asintoti dell'asse reale:

"gli asintoti dividono il piano complesso in parti equivalenti e simmetriche rispetto all'asse reale"

Differenza poli e zeri

Il centro degli asintoti si trova nel BARICENTRO individuato da poli e zeri

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} \quad \text{(BARICENTRO)}$$

Regola per l'asse reale:
- i rami uscenti dai poli di molteplicità >1 dividono il piano complesso in parti equivalenti e simmetriche rispetto all'asse reale;
- i rami entranti negli zeri di molteplicità >1 dividono il piano complesso in parti equivalenti e simmetriche rispetto all'asse reale;