La Trasformata di Laplace

DEFINIZIONE $f(t)$ reale e complessa di variabile reale t definita nel semiasse reale positivo e continua in $\mathbb{R}^+$ e sommabile in ogni intervallo $[0,T]$ con $T>0$

$\Rightarrow$ definiamo TRASFORMATA DI LAPLACE di $f(t)$ come la funzione complessa $F(s)$ di variabile complessa $s = \alpha + j\omega$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

↓

è la trasformata se $\exists$ un insieme I del piano complesso t.c. $\forall s \in I$ l'integrale converge

↳ CONDIZIONE DI CONVERGENZA

$$\int_0^{+\infty} |f(t)\, e^{-st}|\, dt < \infty \quad \forall s \in I$$

- $f(t)$ → GENERALMENTE CONTINUA O CONTINUA A TRATTI
  - ORDINE ESPONENZIALE $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$

] CONDIZIONI DIRICHLET ↓ garantiscono esistenza trasformata

ASCISSA DI CONVERGENZA → estremo inferiore dell'insieme di valori reali α dei punti complessi per cui converge l'integrale di def. della TDF Laplace

↳ converge PER VALORI A DESTRA DELL'ASCISSA DI CONVERGENZA (SEMIPIANO CONVERGENZA)

$\Rightarrow$ $F(s)$ def sul piano complesso esclusi punti di singolarità polare → se il numero finito allora $F(s)$ uguale a un rapporto di polinomi in s

CRITERIO PRATICO

Trovare funz. che maggiori in norma la funzione data

es) $f(t) = t^n$ ordine esp $(n+1)$ $\quad |t^n| < e^{(n+1)t}$ $\Rightarrow$ HA LA TRASFORMATA

$f(t) = e^{t^2}$ $\Rightarrow$ NON TRASFORMABILE

TRASFORMATE RAZIONALI

$$F(S) = \frac{N(S)}{D(S)} \longrightarrow N(S)=0 \ \text{(ZERI)} \ \text{SISTEMA} \qquad D(S)=0 \ \text{(POLI)} \ \text{SISTEMA} \longrightarrow \text{SINGOLARITÀ DELLA FUNZIONE}$$

ANTITRASFORMATA LAPLACE

Data f. di variabile complessa $F(S)$ calcolo la $f(t)$ di cui $F(S)$ è trasf. Laplace

INTEGRALE DI BROMWICH

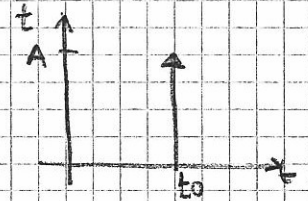
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(S)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

TRASFORMATE ELEMENTARI

- **IMPULSO DIRAC** $\delta(t-t_0)$ con $t_0=0 \rightarrow \delta(t)$

$$F(S) = \int_0^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1$$

$$\boxed{\delta(t) \Longleftrightarrow 1}$$



- **IMPULSO RITARDATO** $\delta(t-t_0)$ $t_0 \neq 0$

$$F(S) = \int_0^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-st}\, dt = e^{-st_0}$$

$$\boxed{\delta(t-t_0) \Longleftrightarrow e^{-st_0}}$$

PROPRIETÀ CAMPIONAMENTO DIRAC: $\forall f(t)$ continua in $t=t_0$

$$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

↳ NEL PRODOTTO IL DIRAC LASCIA INALTERATA LA FUNZ IN PARTENZA NEL PUNTO IN APPLICAZIONE DELL'IMPULSO STESSO. (DIRAC NEUTRO CONVOLUZIONE)

- **GRADINO UNITARIO** $u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$

$$F(S) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot 1\, dt = \frac{1}{S}$$

$$\boxed{u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{S}}$$

- **GRADINO TRASLATO** $u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t<t_0 \\ 1 & t\geq t_0 \end{cases}$

$$F(S) = \int_0^{+\infty} u(t-t_0)\, e^{-st}\, dt = \frac{e^{-st_0}}{S} \qquad \boxed{u(t-t_0) \Longleftrightarrow \frac{e^{-st_0}}{S}}$$

- **ESPONENZIALE** $e^{at}u(t)$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} = \frac{1}{s-a}$$

$$\boxed{e^{at}u(t) = \frac{1}{s-a}}$$



- **SENO** $\text{sen}(\omega t)\,u(t)$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \text{sen}(\omega t)\, e^{-st} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\boxed{\text{sen}(\omega t)u(t) \iff \frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$$

- **SENO SFASATO** $\text{sen}(\omega t + \phi)\,u(t)$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \text{sen}(\omega t + \phi)\, e^{-st}\, dt = \frac{\omega\cos(\phi) + s\,\text{sen}(\phi)}{s^2+\omega^2}$$

$$\boxed{\text{sen}(\omega t+\phi)u(t) \iff \frac{\omega\cos(\phi) + s\,\text{sen}(\phi)}{s^2+\omega^2}}$$

- **COSENO** $\cos(\omega t)\,u(t)$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)\, e^{-st}\, dt = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\boxed{\cos(\omega t)u(t) \iff \frac{s}{s^2+\omega^2}}$$

PROPRIETÀ TRASFORMATA

- **Linearità**

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t) \iff F_1(s) \\ f_2(t) \iff F_2(s) \end{array}\right\} \; c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \iff c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- **Derivazione in s**

$$t \cdot f(t) \iff -\frac{d\,F(s)}{ds}$$

$$t^n f(t) \iff (-1)^k \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$



CASO GENERALE $\boxed{\frac{t^k}{k!}u(t) \iff \frac{1}{s^{k+1}}}$

- Traslazione in t

$$f(t-t_0) \Longleftrightarrow F(s)\,e^{-st_0}$$

- Traslazione in s

$$f(t)\,e^{at} \Longleftrightarrow F(s-a)$$

- Cambiamento Scala

$$f(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

- Derivazione in t

$$\frac{df}{dt} \Longleftrightarrow s\cdot F(s) - F(0)$$

- Integrazione in t

$$\int_0^t f(t)\,dt = \frac{1}{s} F(s)$$

- Convoluzione

$$f_1(t) \Longleftrightarrow F_1(s)$$
$$f_2(t) \Longleftrightarrow F_2(s)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau) \Longleftrightarrow F_1(s)\,F_2(s)$$

(convoluto)

- Valore Iniziale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- Valore Finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

VALE SOLO SE $\lim_{t\to\infty} f(t)$ È FINITO

- FUNZIONE PERIODICA

$$f_p(t) = f_p(t+nT)$$

$$F_p(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT} f_p(t)\, e^{-st}\, dt = \frac{F(s)}{1-e^{-sT}}$$

$$\boxed{f_p(t+nT) \Longleftrightarrow \frac{F(s)}{1-e^{-sT}}}$$

TSF LAPLACE : eq diff II ordine

Partiamo da $a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$

con 2 CONDIZIONI INIZIALI NON NULLE $\begin{cases} Y(0) = Y_0 \\ \dot{Y}(0) \neq 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\} = s\,\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \dot{y}(0)$$

$$a_0 Y(s) + a_1\left[sY(s) - Y(0)\right] + a_2\left[s^2 Y(s) - sY(0) - \dot{Y}(0)\right] = b_0 U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s)}_{\text{risposta in evoluzione forzata}} + \underbrace{\frac{a_2 s Y(0) + a_2 \dot{Y}(0) + a_1 Y(0)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}}_{\text{risposta in evoluzione libera}}$$

→ CASO condizioni iniziali nulle $G(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$

$p_{1/2} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0 a_2}\right)$ stabilità dipende dai poli

studio i sistemi come se avessero CI nulle e se così non fosse basterebbe aggiungere antitrasformata della parte iniziale

$\Delta = \frac{a_1}{4}^2 - a_0 a_2$ $\begin{cases} > 0 & \text{POLI REALI DISTINTI} \\ = 0 & \text{POLI REALI COINCIDENTI} \\ < 0 & \text{POLI COMPLESSI CONIUGATI} \end{cases}$

- POLI REALI DISTINTI $\Delta > 0$

$G(0) = \frac{b_0}{a_0}$ $\qquad G(s) = G(0)\frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

$= \frac{b_0/a_2}{(s-p_1)(s-p_2)}$ con $T_1 = -\frac{1}{p_1}$, $T_2 = -\frac{1}{p_2}$

$p_1 p_2 = \frac{a_0}{a_2} = \frac{1}{T_1 T_2}$ $\qquad p_1 + p_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ (TRACCIA POLINOMIO = SOMMA radici cambiate di segno)

$$G(s)U(s) = \frac{b_0/a_2}{(s+1/T_1)(s+1/T_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/T_1} + \frac{C}{s+1/T_2}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{b_0/a_2}{(s+1/T_1)(s+1/T_2)} = \frac{b_0}{a_2} T_1 T_2 = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

$$B = \lim_{s\to -1/T_1} \frac{b_0/a_2}{s(s+1/T_2)} = + \frac{b_0}{a_2} \frac{T_1^2 T_2}{T_2 - T_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} G(0)$$

$$C = \lim_{s\to -1/T_2} \frac{b_0/a_2}{s(s+1/T_1)} = - \frac{b_0}{a_2} \frac{T_1 T_2^2}{T_2 - T_1} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} G(0)$$