MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

26/09

APPLICAZIONI DEL CONTROLLO AUTOMATICO

SISTEMI DI CONTROLLO: ESISTONO DI TIPO ALGEBRICO E DI TIPO DINAMICO

- SISTEMI ALGEBRICI: INSIEMI DI PARTI MESSE INSIEME CHE SI COMPORTANO COME INGRESSO E USCITA COLLEGATE ALGEBRICAMENTE (SISTEMI COSTANTI) (INDIPENDENTI DAL TEMPO)

- SISTEMI DINAMICI: SISTEMI CHE VARIANO NEL TEMPO E CI INTERESSANO ANCHE LE VARIAZIONI PRIMA DEL REGIME. SI USA OPERATORI NON PIÙ ALGEBRICI, MA DIFFERENZIALI.

NEI SISTEMI ALGEBRICI CI INTERESSANO I RISULTATI A REGIME, SOTTO UNA CERTA STABILITÀ, CIOÉ DOPO UN CERTO TEMPO TRANSITORIO, A SECONDA DELL'INGRESSO

ES: $V = RI$

DEFINIZIONE DI SISTEMA = INSIEME DI COMPONENTI FISICI INTERCONNESSI E INTERAGENTI IN MODO TALE CHE SI COMPORTINO COME UN'UNICA ENTITÀ

"PIÙ COMPONENTI MESSI INSIEME PER OTTENERE UNA DETERMINATA COSA"

UN MODELLO È LA DESCRIZIONE FORMALE DI UN SISTEMA E PUÒ ESSERE CLASSIFICATO:

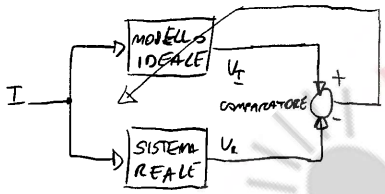
- SPERIMENTALE = VIENE MISURATA L'USCITA DEL SISTEMA SOGGETTA A INGRESSI NOTI
- ANALITICO = SISTEMA VISTO COME UN INSIEME DI COMPONENTI OGNUNO DEI QUALI È CARATTERIZZATO DA UN PROPRIO MODELLO

MODELLO PIÙ COMUNE: SCATOLA NERA



⇒ MODO PIÙ SEMPLICE

SE SO QUALCOSA IN PIÙ, SI PUÒ FARE DEI MODELLI ACCURATI IN MODO CHE POSSA SAPERE I COMPONENTI, E LE SUE FUNZIONI COSTITUTIVE, IN MODO DA CONOSCERE CHE RELAZIONE C'È TRA INPUT E OUTPUT



SE L'OUT DEL COMPARATORE È DIVERSA DA $\varnothing$ VADO A MODIFICARE IL MODELLO IDEALE PER RENDERLO PIÙ POSSIBILE VICINO AL SISTEMA REALE

SE $U_I = U_R$ SIAMO APPOSTO (BUON MODELLO) ⇒ L'OUT DEL COMPARATORE $= \varnothing$

IN QUESTO CORSO SI ASSUME CHE IL MODELLO IDEALE SIA QUELLO GIUSTO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

I SISTEMI DINAMICI POSSONO ESSERE TEMPO CONTINUI O TEMPO DISCRETI

- TEMPO CONTINUI = EVOLVONO NEL TEMPO PER ISTANTI SUCCESSIVI E CONTINUI
- TEMPO DISCRETI = LE COSE AVVENGONO PERCHÉ SONO CONTROLLATE A SCANSIONE DI TEMPO

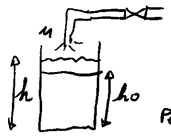
(ES: MACCHINA A GETTONI) IN QUESTI SISTEMI LA VARIABILE DI USCITA NON È CORRELATA ALLA VARIABILE DI INGRESSO, MA C'È UNA GRANDEZZA INTERMEDIA CHIAMATA STATO DEL SISTEMA DINAMICO (COME UNA SPECIE DI CONTATORE NELL'ESEMPIO DELLA MACCHINA)

SUPPONIAMO CHE LA MACCHINA ACCETTI $(0{,}50\ ;\ 1\ ;\ 2)$ € E VOLESSI L'USCITA A 3,50€. IL SISTEMA DARÀ UN'USCITA A SECONDA DELLO STATO IN CUI MI TROVO [1° STATO POSSIBILE = 0€ ; 2° = 0,50 € ; 3° = 1,00€ ; ECC] (UN PO' COME LE CONDIZIONI INIZIALI DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE)

LO STATO DEL SISTEMA DINAMICO VARIA A SECONDA DEGLI INGRESSI, A MENO CHE NON INSERISCA L'ULTIMO STATO POSSIBILE, CHE MI DARÀ L'USCITA E A QUEL PUNTO LO STATO SI RIAZZERA.

MA LO STATO NON È SEMPRE FACILE DA CALCOLARE E SE NON RIESCO A MISURARLO, SI PUÒ STIMARE

ESEMPIO PER CALCOLARE LO STATO DEL SISTEMA DINAMICO



u = PORTATA D'ACQUA

A = AREA = SUPERFICIE DI BASE DEL SERBATOIO

PER QUANTITÀ INFINITESIMA $(t \to t_0 \Rightarrow \Delta V \to dV)$

$$\Delta V_{tot} = A(h - h_0) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

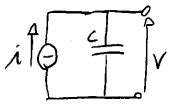
$u(\tau)$ = ACQUA INSERITA

$$dV = A\,dh = u(t)\,dt$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{u(t)}{A}}$$ ⇒ RISOLVIBILE SOLO SE CONOSCO $h(t_0) = h_0$

IL RISULTATO È UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE USATA PER RISOLVERE UN PROBLEMA INGEGNERISTICO

ESEMPIO EQUIVALENTE ALLA CARICA DEL SERBATOIO: CARICA DI UN CONDENSATORE



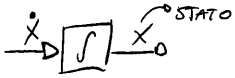
$C\frac{dV}{dt} = i(t)$ $\quad\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{i(t)}{C}}$

E' UGUALE ALL'ESEMPIO DI PRIMA PERCHE' NON SO QUANTA CARICA C'ERA NEL CONDENSATORE ALL'INIZIO (t_0)

h e V SONO LE DUE INCOGNITE CHE DIPENDONO DALLA CONDIZIONE INIZIALE

TUTTE LE GRANDEZZE CHE DIPENDO DALLO STATO INIZIALE (DAL PASSATO) SI CHIAMANO VARIABILI DI STATO DEL SISTEMA (NEGLI ESEMPI: h e V CI DICONO LO STATO)

(UN'ALTRO ESEMPIO: $F = ma \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{F(t)}{m}$)



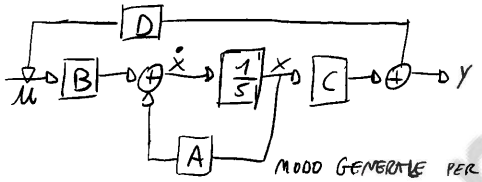
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ $\quad \dot{x} \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow x$

- ABBIAMO UN BLOCCHETTO INTEGRATORE PER OGNI ELEMENTO CHE HA MEMORIA TUTTI GLI ELEMENTI CHE HANNO MEMORIA, CHE HANNO UNO STATO, POSSONO ESSERE COLLEGATI IN UNA CERTA MANIERA AL BLOCCHETTO
- OGNI VOLTA CHE HO UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE IN UN SISTEMA DINAMICO, LA POSSIAMO CARATTERIZZARE CON UN BLOCCETTO OPERATORE INTEGRATORE DINAMICO.
- HO UN'EVOLUZIONE DINAMICA CHE DIPENDE DA DELLE CONDIZIONI INIZIALI, PERCHE' SENNÒ NON POSSIAMO AVERE UN'USCITA

TUTTI I SISTEMI DINAMICI LINEARI SONO DESCRIVIBILI CON UNO STOCK DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \leftarrow \text{EQUAZIONE DELLA VARIABILE DI STATO} \\ y = Cx + Du \leftarrow \text{EQUAZIONE DI USCITA} \end{cases}$$

- x = VETTORE DEGLI STATI
- u = INGRESSO
- y = USCITA DEL SISTEMA DINAMICO
- A = MATRICE CHE CARATTERIZZA GLI STATI
- B = MATRICE CHE CARATTERIZZA LA CORRISPONDENZA TRA STATI E USCITA (OPPURE RAPPRESENTA L'ELEMENTO DI COLLEGAMENTO TRA INGRESSI E VARIABILI DI STATO)
- C = MATRICE CHE METTE IN RELAZIONE GLI STATI DEL SISTEMA DINAMICO E L'USCITA
- D = GRANDEZZA CHE METTE IN RELAZIONE LE USCITE CON GLI INGRESSI DIRETTAMENTE



MODO GENERALE PER DESCRIVERE UN SISTEMA DINAMICO

TUTTI I SISTEMI DINAMICI LINEARI POSSONO ESSERE RAPPRESENTATI DA UN PUNTO DI VISTA MATEMATICO (EQUAZIONI DIFFERENZIALI VETTORIALI) O CON UN PUNTO DI VISTA AUTOMATICO (SCHEMA A BLOCCHI)

27/09

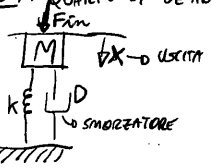
$$\begin{cases} \dot{x} = \underset{n\times n}{A}\,x + \underset{n\times r}{B}\,u \\ y = Cx + Du \end{cases}$$ (A: MATRICE DEL SISTEMA; B: MATRICE RETTANGOLARE)

$\rightarrow$ SE RAPPRESENTA UN MODELLO, IN VARIABILI DI STATO, LINEARE TEMPOINVARIANTE $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \rightarrow$ MODELLO NON LINEARE $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(t) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$

OGNI VOLTA CHE ABBIAMO A CHE FARE CON n STATI, ABBIAMO n INTEGRATORI

SCRITTO IN FORMA COMPATTA: $\begin{bmatrix} A_{n,n} & B_{n,r} \\ C_{m,n} & D_{m,r} \end{bmatrix}$ (COSTITUITA DA $n+m$ RIGHE, $n+r$ COLONNE)

ES: QUARTO DI VETTURA



$$\left.\begin{aligned} F = M_a = M\frac{d^2x}{dt} \\ F = Dv = D\frac{dx}{dt} \\ F = Kx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Sigma F = M_a \rightarrow M\frac{d^2x}{dt} = F_{IN} - Kx - D\frac{dx}{dt}$$

DEFINIAMO: $x = x_1$, $\frac{dx}{dt} = x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{F_{IN}}{M} - \frac{Kx_1}{M} - \frac{Dx_2}{M} \end{cases} \qquad \vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{D}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}u \qquad u = F_{IN}$$

$\dot{x} = Ax + Bu$

COSÌ ESPRIMO UN SISTEMA CON 2 VARIABILI DI STATO IN UN SISTEMA DI 2 EQUAZIONI CON 1 VARIABILE DI STATO

EQUAZIONE DI USCITA: HO DEFINITO L'USCITA $x = x_1$ $\quad y = x_1 = \underset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$ $\quad D = 0$ PERCHE' NON C'E' LEGAME DIRETTO TRA INGRESSO E USCITA

REALIZZAZIONE DI UN SISTEMA DINAMICO = DETERMINARE LE MATRICI A, B, C, D

SI DICE SISTEMA PERFETTAMENTE REALIZZATO QUANDO TUTTE E QUATTRO LE MATRICI SONO DETERMINATE

NOI STUDIEREMO SOLO SISTEMI LINEARI (CIOÈ CHE NON ESISTONO PRODOTTI TRA VARIABILI DI STATO) CHE SONO DELLE FORTI APPROSSIMAZIONI

COME E' POSSIBILE ESTRARRE DELLE CONSIDERAZIONI GENERALI SUL FUNZIONAMENTO DI UN SISTEMA DINAMICO CONOSCENDO LE QUATTRO MATRICI?

- LA MATRICE A LEGA LA DERIVATA DELLO STATO CON LO STATO; DICE QUANTO SI STA SPOSTANDO LO STATO DEL SISTEMA. UNA VOLTA NOTA, CI FA CAPIRE SE IL SISTEMA DINAMICO E' STABILE (TUTTI I SISTEMI DINAMICI HANNO UNA CONDIZIONE DI STABILITÀ)

- LA MATRICE B COLLEGA L'EVOLUZIONE DELLO STATO CON L'INGRESSO

ESISTE UNA MATRICE COMPOSTA DALLA COPPIA DI MATRICI $[A,B]$ CHIAMATA MATRICE DI CONTROLLABILITÀ, ATTRAVERSO LA QUALE POSSIAMO CONTROLLARE UN SISTEMA DINAMICO ATTRAVERSO L'INGRESSO, CIOÈ CHE ATTRAVERSO UNA SERIE DI INGRESSI POSSIAMO CONTROLLARE LO STATO. SE NON POSSO FARE QUESTO VUOL DIRE CHE $\det(M_c)=0$ E IL SISTEMA NON E' CONTROLLABILE

$$M_C=[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots\dots \quad A^{2n-1}B]$$

- LA MATRICE C E' L'ELEMENTO DI COLLEGAMENTO TRA LE VARIABILI DI STATO E L'USCITA

DALLA COPPIA $[A,C]$ SI ESTRAE LA MATRICE DI OSSERVABILITÀ (DUALE A M_C).

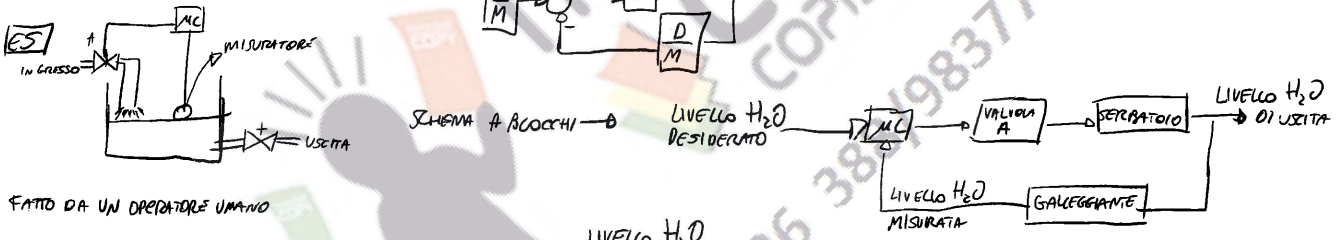
$$M_O=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{2n-1} \end{pmatrix}$$

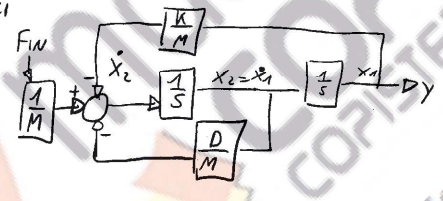
SERVE QUANDO VOGLIO CONOSCERE LA CONDIZIONE DI UNO STATO QUANDO ESSO NON È FACILE MISURARLO DICE SE E' SEMPRE POSSIBILE (ATTRAVERSO LA LETTURA DELL'INGRESSO E DELL'USCITA) DI RISALIRE A DOVE SI TROVA LO STATO. SE POSSO FARE QUESTO SI DICE CHE LO STATO DEL SISTEMA E' OSSERVABILE

- LA MATRICE D E' UN LEGAME DIRETTO TRA INGRESSO E USCITA, CIOÈ NON PASSA ATTRAVERSO LA DINAMICA (A UN INGRESSO CORRISPONDE ISTANTANEAMENTE UN'USCITA), MA NEI SISTEMI FISICI REALI NON AVVIENE MAI $\Rightarrow D=0$ E SONO CHIAMATI SISTEMI NON STRETTAMENTE PROPRI, INVECE NEI SISTEMI DOVE LA RISPOSTA E' ISTANTANEA SONO STRETTAMENTE PROPRI

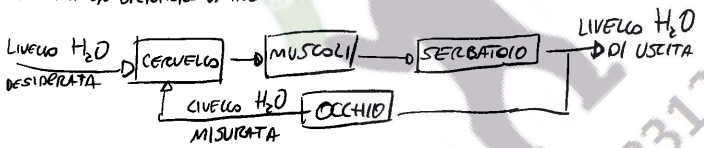
IN UN SISTEMA DINAMICO NON SI HA SOLO INGRESSO E USCITA, MA CI SONO UN'INFINITÀ DI VARIABILI IMPREVEDIBILI DURANTE IL TRANSITORIO. QUESTE VARIABILI SI CHIAMANO DISTURBI DEL SISTEMA CHE NON POSSONO ESSERE MISURATI, CHE SONO DEI VERI E PROPRI INGRESSI, O PROBLEMI DI USCITA, NON PREVEDIBILI

SCHEMA A BLOCCHI DEL SISTEMA



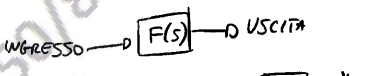


FATTO DA UN OPERATORE UMANO

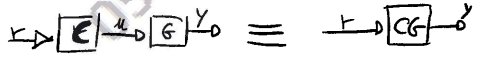


ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

- FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $F(s)=\frac{\text{USCITA}}{\text{INGRESSO}}$



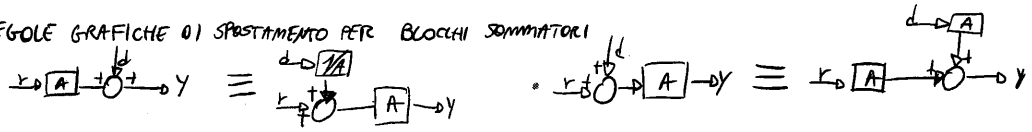
- RIDUZIONE DI DUE BLOCCHI IN CASCATA



- RIDUZIONI DI DUE BLOCCHI IN PARALLELO



- REGOLE GRAFICHE DI SPOSTAMENTO PER BLOCCHI SOMMATORI

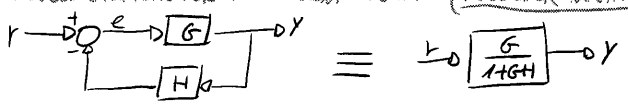


- REGOLE GRAFICHE DI SPOSTAMENTO DI CONNESSIONI



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

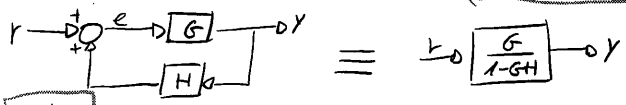
- REGOLE GRAFICHE PER RETROAZIONI NEGATIVE (FEEDBACK NEGATIVO)



DIMOSTRAZIONE: $y = Ge = G(r - Hy) = Gr - GHy$
$\Rightarrow y(1+GH) = Gr \Rightarrow \frac{y}{r} = \frac{G}{1+GH}$

[IN GENERALE SI HA AL NUMERATORE IL PRODOTTO TRA I BLOCCHI IN CATENA DIRETTA TRA INGRESSO E USCITA QUANDO IL CANALE DI REAZIONE È APERTO, AL DENOMINATORE IL TERMINE 1 PIÙ IL GUADAGNO D'ANELLO, CIOÈ IL PRODOTTO TRA TUTTI I BLOCCHI CHE RISULTANO INTERNI ALL'ANELLO CHIUSO]

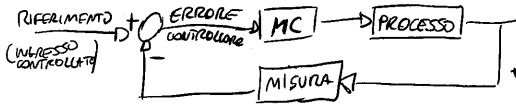
- REGOLE GRAFICHE PER RETROAZIONI POSITIVE (FEEDBACK POSITIVO)



3/10

VOGLIAMO DESCRIVERE UN SISTEMA IN QUESTA MANIERA

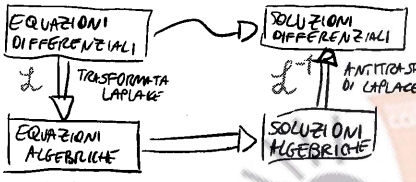
LO SCOPO DEL CORSO È DIMENSIONARE IL MICROCONTROLLORE



← FEEDBACK NEGATIVO (NORMALMENTE I FEEDBACK POSITIVI NON SI USANO PERCHÉ PORTANO ALL'INSTABILITÀ DEL SISTEMA DINAMICO)

SPESSO IL PROCESSO È TEMPO CONTINUO, MENTRE IL CONTROLLORE LAVORA A DATI CAMPIONATI, CIOÈ A TEMPO DISCRETO QUINDI VIENE INTRODOTTA LA TRASFORMATA CHE CI PERMETTE DI TRADURRE UN FENOMENO DI TIPO TEMPO CONTINUO O TEMPO DISCRETO IN UN LINGUAGGIO PIÙ SEMPLICE.

TRASFORMATA DI LAPLACE (IN REALTÀ HA ORIGINI MATEMATICHE DA EULERO NEL 1737)
PERMETTE DI USARE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN MODO "MASCHERATO", CIOÈ LE USO MA LE CALCOLO CON UN CONTO ALGEBRICO



DOMINIO TEMPO = EVOLUZIONE DINAMICA. HO A CHE FARE CON VARIABILI REALI
(MATEMATICAMENTE SI RISOLVE L'EQUAZIONE PER TROVARE UNA FUNZIONE DEL TEMPO)

DOMINIO COMPLESSO = HO A CHE FARE CON EQUAZIONI ALGEBRICHE NEL CAMPO COMPLESSO (PIANO DI GAUSS)

LO SVILUPPO NEL DOMINIO NEI NUMERI COMPLESSI È UTILE PER I MICROCONTROLLORI

TRASFORMATA DI LAPLACE DI UNA FUNZIONE DEL TEMPO
LA TRASFORMATA È UNA FUNZIONE COMPLESSA DI UNA VARIABILE COMPLESSA $S = X + JY$ DOVE $J = \sqrt{-1}$

$F(S)$ ← FUNZIONE DI S IN 4 DIMENSIONI. QUANDO LE FUNZIONI COMPLESSE SONO OLOMORFE ALLORA SONO DERIVABILI, CIOÈ È DI TIPO C^∞ (INFINITE DERIVATE IN QUEL PUNTO) (SE È DERIVABILE UNA VOLTA, LO È INFINITE VOLTE). SE UNA FUNZIONE È DERIVABILE ALLORA È ESPANDIBILE IN SERIE DI POTENZE, QUINDI IN MANIERA ANALITICA.

LA VARIABILE COMPLESSA S È UNA VARIABILE PARAMETRICA CHE SOSTITUISCE LA VARIABILE TEMPO

DEFINIZIONE DI $\mathcal{L}$-TRASFORMATA $\quad \mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(s) \equiv \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$

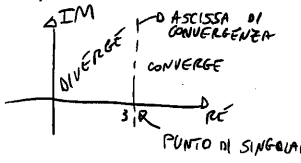
COS $S = \alpha + J\beta \Rightarrow F(s)$ È LA TRASFORMATA DI LAPLACE DI $f(t)$



È UNA TRASFORMATA MONOLATERA, CIOÈ CHE IL TEMPO VA DA 0 IN AVANTI CON 0 ISTANTE DI PARTENZA QUINDI SI PRENDE COME VALORE NULLO NEGLI ISTANTI PRIMA DI 0

L'INTEGRALE DOVRÀ CONVERGERE IN UN INTERVALLO DEL PIANO COMPLESSO → $\int |f(t)e^{-st}dt| < \infty$
AL VARIARE DI S NEL CAMPO COMPLESSO DOBBIAMO VERIFICARE CHE L'INTEGRALE CONVERGA

ES $f(t) = e^{3t} \quad \mathcal{L}\{e^{3t}\} = \int_0^\infty e^{3t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(3-s)t}dt = \frac{1}{3-s}\left[e^{(3-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-3}$ PERCHÉ CONVERGA $(3-s)<0 \Rightarrow Re\{s\} > 3$



ESSENDO UNA FUNZIONE ANALITICA SI PUÒ ESTENDERE IN TUTTO IL PIANO COMPLESSO ATTRAVERSO L'ESTENSIONE DEGLI ELEMENTI DI WEIERSTRASS
⇒ LA $F(s)$ RISULTA DEFINITA SU TUTTO IL PIANO COMPLESSO TRANNE NEI PUNTI DI SINGOLARITÀ POLARE
NON SI PUÒ DIRE NULLA A PRIORI
RADICE DEL DENOMINATORE

MA ALL'INGEGNERE NON IMPORTA DELL'ASCISSA DI CONVERGENZA, MA CONVERGE TUTTO, AMMESSO CHE IL SISTEMA SIA INTEGRABILE.
PER DIRE CHE UNA FUNZIONE SIA $\mathcal{L}$-TRASFORMABILE, ALL'INGEGNERE BASTA CHE:

$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ CON $\begin{cases} f(t) \text{ CONTINUA} \\ M = \text{COSTANTE DI MAGGIORAZIONE} \end{cases}$ $\quad (e^{t^2}$ NON È $\mathcal{L}$-TRASFORMABILE)

AUTOMATICA

LE CONDIZIONI DI TRASFORMABILITÀ = CONDIZIONI DI DIRICHLET ⇒ CONDIZIONI PER CUI $f(t)$ DEVE ESSERE CONTINUA A TRATTI E DI ORDINE ESPONENZIALE

$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ (CON N e D POLINOMI IN s)

SI DEFINISCONO ZERI DEL SISTEMA DINAMICO QUEI VALORI DI s CHE ANNULLANO IL NUMERATORE $(N(s)=0)$
SI DEFINISCONO POLI DEL SISTEMA DINAMICO QUEI VALORI DI s CHE ANNULLANO IL DENOMINATORE $(D(s)=0)$
POLI E ZERI SI CHIAMANO SINGOLARITÀ DELLA FUNZIONE RAZIONALE FRATTA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

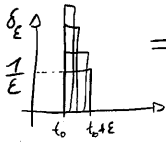
ANTITRASFORMATA DI LAPLACE PER TORNARE ALLA VARIABILE TEMPO
(INTEGRALE DI BROMWICH → VIENE PROLUNGATO A TUTTO L'ASSE REALE NELL'IPOTESI CHE $f(t)=0$ SE $t<0$)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\,e^{st}\,ds = f(t)$$

INTEGRALE DI LINEA SU UNA CURVA COMPLESSA A PARTE REALE COSTANTE MAGGIORE DELL'ASCISSA DI CONVERGENZA DELLA FUNZIONE $f(t)$

FUNZIONE DI DIRAC → IMPULSO DI DIRAC (FUNZIONE RETTANGOLARE DI AREA UNITARIA)

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t<t_0 \\ 1/\varepsilon & t_0<t<t_0+\varepsilon \\ 0 & t>t_0+\varepsilon \end{cases}$$

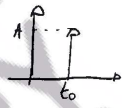


⇒ AREA (INTEGRALE) = 1 $\forall\varepsilon$

SE $\varepsilon \to 0$ ⇒ δ_ε TENDE AD INFINITO MA COMUNQUE HA AREA 1

⇒ FUNZIONE IMPULSIVA DI DIRAC → AREA UNITARIA E NULLO NEGLI INTERVALLI ESTERNI AL SUO ISTANTE DI APPLICAZIONE

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t-t_0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t-t_0)\,dt = 1 \qquad \delta(t-t_0) = 0 \;\forall\, t\neq t_0$$



$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$ ⇒ OGNI FUNZIONE CONTINUA IN $t=t_0$, LA FUNZIONE IMPULSIVA LASCIA INALTERATA LA FUNZIONE DI PARTENZA NEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELL'IMPULSO

⇒ L'IMPULSO DI DIRAC È L'ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE
SE LA MOLTIPLICO PER UNA FUNZIONE DEL TEMPO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta_\varepsilon(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

⇒ PROPRIETÀ DI CAMPIONAMENTO DI DIRAC

$$\int_0^{+\infty}\delta_\varepsilon(t-t_0)\,e^{-st}\,dt = e^{-st_0}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (t_0 \text{ NELL'ORIGINE})$$

DEFINIZIONE DI TRASFORMATA DI DIRAC

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$$

e^{-st_0} MI DICE DI QUANTO HO TARDATO IL SISTEMA RISPETTO ALL'ORIGINE

ORA PERÒ SORGE UN PROBLEMA: COSA VUOL DIRE DIRAC APPLICATO ALL'ORIGINE → STO APPLICANDO IL DIRAC TRA 0^- e 0^+



IN REALTÀ LA LAPLACE ANDREBBE SCRITTA $\lim_{\varepsilon\to 0^\pm}\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}\,dt$ → 0^+ → $\mathcal{L}^+$; 0^- → $\mathcal{L}^-$

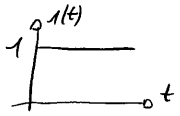
SONO UGUALI SE LA $f(t)$ NON CONTIENE UNA FUNZIONE IMPULSIVA NELL'ORIGINE, MENTRE SI OTTIENE UN RISULTATO DIVERSO SE È PRESENTE UN IMPULSO NELL'ORIGINE ∂_0

$$\Rightarrow \mathcal{L}^-\{f(t)\} = \mathcal{L}^+\{f(t)\} + \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\,dt \Rightarrow \mathcal{L}^-\{f(t)\} = \mathcal{L}^+\{f(t)\} + \partial_0$$

[NOI ANDREMO A LAVORARE CON 0^- (CIOÈ $\varepsilon\to 0^-$) NELL'ORIGINE SE IN $t_0=0$ È PRESENTE UN IMPULSO
⇒ PRENDEREMO LA TRASFORMATA IN $\emptyset = \mathcal{L}^-$]

FUNZIONE A GRADINO

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$



$$\int_0^{\infty} 1\cdot e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}}$$

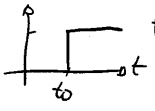
PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE DEL TEMPO

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = \int_0^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}\,dt \qquad \tau = t-t_0 \to \int_{-t_0}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-s(\tau+t_0)}\,d\tau = e^{-st_0}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-st_0}F(s)$$

($-t_0 \to \emptyset$ PERCHÉ PRIMA DI $\emptyset$ IL SISTEMA È NULLO)

⇒ $\boxed{\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s)}$ SE CONOSCO $f(t)$ → CONOSCO $F(s)$ E QUINDI CONOSCO $F(s)\,e^{-st_0}$

→ GRADINO RITARDATO



$$\boxed{\mathcal{L}\{1(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s) = e^{-st_0}\frac{1}{s}}$$