TEORIA AUTOMATICA

TRASFORMATA DI LAPLACE

DEFINIZIONE: $f(t)$ funzione reale o complessa di variabile reale t definita nel semiasse reale positivo, GENERALMENTE CONTINUA in $\mathbb{R}^+$ e SOMMABILE in ogni intervallo $[0, T]$ con $T > 0$

Definiamo TRASFORMATA DI LAPLACE la funzione complessa di variabile complessa

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \triangleq \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s = \alpha + j\beta$$

Inoltre perché esista $F(s)$, $f(t)$ deve avere ordine esponenziale α, cioè

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \forall\ t > t_0$$

$F(s)$ è la trasformata di Laplace se è soddisfatta la CONDIZIONE DI CONVERGENZA

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t)\, e^{-st} \right| dt < \infty \quad \forall\ s \in I \in \mathbb{C}$$

Se l'integrale converge per un $s_0 \in \mathbb{C}$ allora converge anche per ogni valore complesso s tale che

$\mathrm{Re}\{s\} \geq \mathrm{Re}\{s_0\}$

↳ ASCISSA DI CONVERGENZA = estremo inferiore dell'insieme di valori reali α dei punti complessi per cui converge l'integrale della definizione di trasformata di Laplace

$f(t)$ GENERALMENTE CONTINUA = dato l'intervallo $[a, b]$ esso può essere diviso in un numero finito di intervalli in cui $f(t)$ è continua e ammette limite dx e sx (cioè ha un numero finito di discontinuità di I specie)

$F(s)$ è definita sul piano complesso eccetto i punti di singolarità. Se sono in numero finito $F(s)$ è uguale a un rapporto di polinomi in s (TRASFORMATE RAZIONALI)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ZERI $N(s) = 0$ — POLI $D(s) = 0$

SINGOLARITÀ

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE (INTEGRALE DI BROMWICH)

Data $F(s)$ l'antitrasformata di Laplace è

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{j2\pi}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)\,e^{st}\,ds$$

$F(s) \iff f(t)$ corrispondenza biunivoca

TRASFORMATE ELEMENTARI

$\delta(t) \iff 1$ $\quad$ $\delta(t-t_0) \iff e^{-t_0 s}$

$1(t) \iff \frac{1}{s}$ $\quad$ $1(t-t_0) \iff \frac{e^{-st_0}}{s}$

$$\begin{cases} e^{at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \iff \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > a$$

$$\sin(\omega t)\,1(t) \iff \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t)\,1(t) \iff \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\sin(\omega t+\phi)\,1(t) \iff \frac{\omega\cos\phi + s\cdot\sin\phi}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t+\phi)\,1(t) \iff \frac{}{s^2+\omega^2}$$

PROPRIETÀ DIRAC

- CAMPIONAMENTO

$$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

- CONVOLUZIONE (elem. neutro)

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t_0)$$

PROPRIETÀ:

1) LINEARITÀ

$f_1(t) \iff F_1(s)$ $\quad$ $f_2(t) \iff F_2(s)$ $\quad$ $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

$$f_1(t)\,C_1 + f_2(t)\,C_2 \iff C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)$$

2) TRASLAZIONE IN t

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0} F(s) \qquad f(t) \iff F(s)$$

3) CAMBIAMENTO DI SCALA

$$f(at) \iff \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

4) DERIVAZIONE IN S

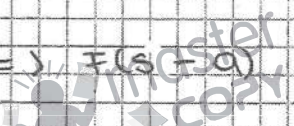
$$t f(t) \iff -\frac{d}{ds} F(s)$$

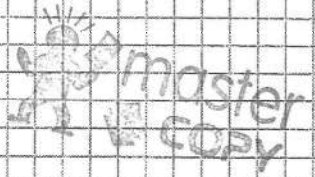
CASO GENERALE $t^m f(t) \iff (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} F(s)$

$\boxed{f(t) = 1(t)}$ $\quad \frac{t^k}{k!} 1(t) \iff \frac{1}{s^{k+1}}$

5) TRASLAZIONE IN S

$$f(t) e^{at} \iff F(s-a)$$





6) DERIVAZIONE IN t

$$\frac{d}{dt} f(t) \iff sF(s) - f(0^-)$$

↳ per convenzione

7) INTEGRAZIONE IN t

$$g(t) \iff \frac{F(s)}{s} \qquad f(t) \iff F(s)$$

8) CONVOLUZIONE

$f_1(t) \iff F_1(s) \qquad f_2(t) \iff F_2(s)$

$f_1(t) * f_2(t) \iff F_1(s) F_2(s)$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$



TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to +\infty} sF(s)$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$ ⇒ APPLICABILE SE E SOLO SE ESISTE FINITO $\lim_{t \to +\infty} f(t)$

TRASFORMATA FUNZIONE PERIODICA: $F_p(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{sT}}$

$F_p(s) \iff f_p(t)$ funzione periodica di periodo T

$F(s) \iff f(t)$ funzione generatrice

TSF LAPLACE: eq diff I ORDINE

$a_1 \frac{d}{dt} y + a_0 y = b_0 u \quad y(0) = 0$ (condizioni iniziali nulle)

$\Rightarrow a_1 s y(s) + a_0 y(s) = b_0 U(s)$

$\therefore G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$ funzione di trasferimento

$G(s) \iff \underbrace{g(t)}$ → Risposta all' IMPULSO

$G(s)\frac{1}{s} \iff \underbrace{\int g(t)\,dt}$ → Risposta al GRADINO

"L'ordine dell'eq. differenziale corrisponde al numero di poli di G(s)"

RISPOSTA AL GRADINO

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0}{a_0 + s a_1}\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1}\frac{1}{s}\right\}$$

Teorema del Valore iniziale

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to+\infty} s\,y(s) = \lim_{s\to+\infty} s\frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1}\frac{1}{s} = 0$$ ok perché $y(0) = 0$

Teorema del valore finale

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1} = \frac{b_0}{a_1}\frac{a_1}{a_0} = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

↓ guadagno statico

$$y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a_0/a_1}$$

$$A = \lim_{s\to 0} s\,y(s) = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

$B = \lim_{s \to -\frac{a_0}{a_1}} (s + a_0/a_1)\, y(s) = \lim_{s \to -\frac{a_0}{a_1}} \frac{b_0/a_1}{s} = -\frac{b_0}{a_0} = -G(0)$

$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \frac{b_0}{a_0}\left(1 - e^{-a_0/a_1 t}\right) 1(t) = G(0)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) 1(t)$

$\tau = \frac{a_0}{a_1}$ costante di tempo caratteristica del sistema

TEMPO DI ASSESTAMENTO ALL' i% = tempo che occorre a un sistema dinamico per raggiungere e rimanere in una fascia del $\pm$ i% intorno al valore di regime

MODI PER SCRIVERE G(S) ⟶ FORMA DI BODE

Evidenzia le costanti di tempo

$G(s) = G(0)\, \frac{1 + s\tau_z}{1 + s\tau_i}$

$G(s) = \frac{b_0}{a_0}\, \frac{1 + s\, b_1/b_0}{1 + s\, a_1/a_0}$

FORMA DI EVANS

Evidenzia le singolarità dinamiche

$G(s) = \frac{b_1}{a_1}\, \frac{s + b_0/b_1}{s + a_0/a_1}$

TSF LAPLACE: eq diff II ordine

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$$

- Condizioni iniziali NON NULLE: $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a_0 y(s) + a_1[s\,y(s) - y(0)] + a_2[s^2 y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)] = b_0 U(s)$

$y(s) = \underbrace{\frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s)}_{\text{RISPOSTA IN EVOLUZIONE FORZATA}} + \underbrace{\frac{a_1 y(0) + a_2 s y(0) + a_2 \dot{y}(0)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s)}_{\text{RISPOSTA IN EVOLUZIONE LIBERA}}$