TRASFORMATA DI LAPLACE

Variabile $\mathbb{R}$ — Dominio tempo (t) — Eq. differenziali — Soluzione eq. diff.

TRASFORMATA (DI LAPLACE) ↓ — ↑ ANTITRASFORMATA (DI LAPLACE)

Variabile $\mathbb{C}$ — Dominio di Laplace — Eq algebriche → Soluzione eq. algebriche

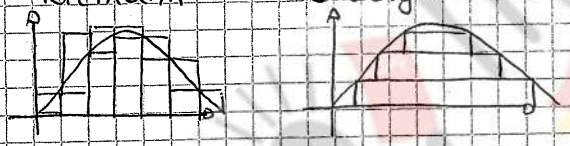
DEFINIZIONE MEMORIA PER L'ESAME: DEFINIZIONE - SIGNIFICATO

Sia $f(t)$ una funzione reale o complessa, di variabile reale t, definita nel semiasse reale positivo e continua in $\mathbb{R}^+$ e sommabile (cioè integrabile secondo Lebesgue*) in ogni intervallo $[0,T]$ con $T>0$, la trasformata di Laplace di $f(t)$ è la FUNZIONE COMPLESSA $F(s)$ DI VARIABILE COMPLESSA $s = a + i\omega$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt = F(s)$$

NB calcolandola deve venire una → valore sparire!

* Riemann — Lebesgue



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9637745

TRASFORMATA DI TIPO • MONOLATERO $t \in [0, +\infty)$ Laplace
• BILATERO $t \in (-\infty, +\infty)$

Non tutti gli integrali convergono → CONDIZIONE DI CONVERGENZA: (affinché la posta applicare il teorema)

L'integrale del modulo è $< \infty$ → $\int_0^{+\infty} |f(t)\,e^{-st}|\,dt < \infty \quad \forall s \in \mathbb{C}$

↓ ovvero assume un valore finito

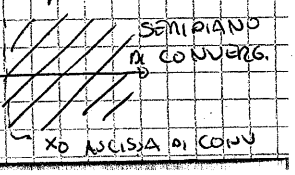
solo alcune f vanno bene

⚠ La definizione prevede la continuità di $f(t)$ però può essere anche ESTESA ALLE F2 CON CONTINUITÀ A TRATTI

⚠ Se l'integrale converge per $s_0 \in \mathbb{C}$ → converge $\forall s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0$ poiché $|e^{-sx}| = e^{-|\mathrm{Re}\, s|\,x}$

ASCISSA DI CONVERGENZA DELLA L-TRASFORMATA

Def estremo inferiore dell'insieme dei valori reali del più complesso per cui l'integrale converge. [s_0 più piccolo]



Invece di trovare l'ascissa di convergenza:

CRITERIO PRATICO PER L'ESISTENZA DELLA L-TRASFORMATA DI UNA F2 $f(t)$

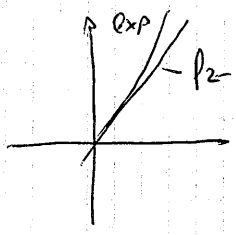
trovare una f2 L-trasformabile in grado di MAGGIORARE la f_2 esaminata

Siccome supponiamo che sono L-TRASFORMABILI TUTTE LE F2 ESPONENZIALI

→ la convergenza dell'integrale di Laplace è dimostrata dimostrando che: $|e^{-\alpha t} \cdot f(t)| \leq \Pi \longleftrightarrow |f(t)| \leq \Pi e^{\alpha t}$

devo dimostrare che c'è un exp che può stare SOPRA LA F2

ex



⚠ la RETTA è L-trasformabile poiché, malgrado divergo ∃ exp che sta sopra a essa (↷ funzione (a rampa))

CONDIZIONE DI DIRICHLET

La trasformata di Laplace esiste se:

- $f(t)$ è CONTINUA A TRATTI
- $f(t)$ è LIMITATA DA UN'ESPONENZIALE $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

ex $f(t) = e^{t^2}$ NO non ∃ $e^{\alpha t}$ che lo maggiori

$f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ✓

$f(t) = t^n$ ✓ $|t^n| < e^{(n+1)t}$

ZERI E POLI DEL SISTEMA DINAMICO

Trasformata $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ → radici $N(s)=0$ → ZERI

→ radici $D(s)=0$ → POLI

ANTITRASFORMATA

Problema inverso? algebrico → diff

$\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ → ANTITRASFORMATA integrale complesso

INTEGRALE DI BROMWICH $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+\infty j} F(s)\, e^{st}\, ds = f(t)$

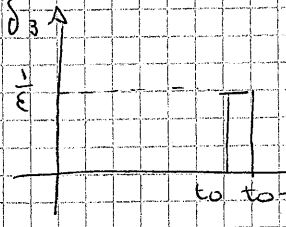
Se ∃ il passaggio da $f \to F$ esiste il passaggio $F \to f$

↳ nell'antitrasformata $f(t) = 0$ per $t < 0$

master COPY CORSTEMA 050/8312126 388 9837745
MASTER COPY Tel. 050 831 21 26 Cell. 388 9837745

CALCOLO DELLE TRASFORMATE

- FUNZIONE RETTANGOLARE AD AREA UNITARIA
[IMPULSO DI DIRAC]



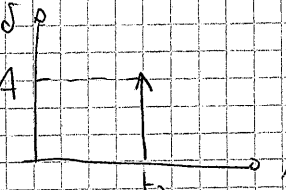
$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1/\varepsilon & t_0 \le t \le t_0+\varepsilon \\ 0 & t > t_0+\varepsilon \end{cases}$$

$$\text{impulso di Dirac } \delta(t-t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t-t_0)$$

altezza infinita e area unitaria

Caratt. del Dirac:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$ [area unitaria]
- $\delta(t-t_0) = 0 \quad \forall t \neq t_0$ [nullo negli intervalli esterni al suo estremo di applicazione]



RAPPRESENTAZIONE DEL DIRAC DI AREA A

PROPRIETÀ DI CAMPIONAMENTO DEL DIRAC

$$f(t)\cdot\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) + \underbrace{f(t\neq t_0)\,\delta(t-t_0)}_{0}$$

$$0$$

infatti

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t_0)\,\delta(t-t_0)\,dt =$$

$$= f(t_0)\int_0^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)\cdot 1 = f(t_0)$$

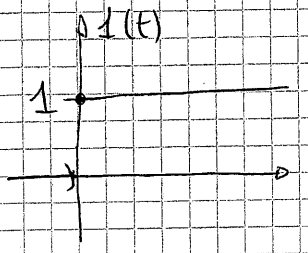
allora

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{+\infty}\delta(t-t_0)\,e^{-st}\,dt = \boxed{e^{-st_0}}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty}\delta(t)\,e^{-st}\,dt = e^{-st_0} = e^{-s\cdot 0} = e^0 = \boxed{1}$$

$\downarrow$ $t_0 = 0$

- FUNZIONE GRADINO

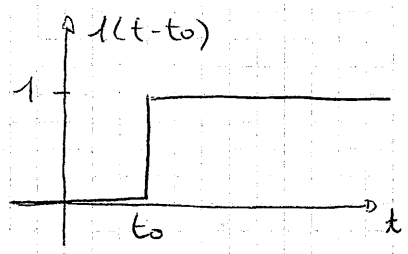


$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \ge 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{+\infty} 1(t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} 1\cdot e^{-st} = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \boxed{\frac{1}{s}}$$

MASTER COPY
Tel. 050 [illegible]
Cell. 328 [illegible]

GRADINO MASCHIO



$$\mathcal{L}\{1(t-t_0)\} = \int_0^{+\infty} 1(t-t_0)\, e^{-st}\, dt = \int_{-t_0}^{+\infty} 1(\tau)\, e^{-s(\tau+t_0)}\, d\tau$$

$$\tau = t - t_0$$

$$= \int_{-t_0}^{0} + \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-s\tau} \cdot e^{-st_0}\, d\tau =$$

$t<0$ (0) $\qquad = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-st_0}\left(-\frac{e^{-s\tau}}{s}\right)\Big|_0^{+\infty} =$

$$= \boxed{+\frac{e^{-st_0}}{s}}$$

MASTER COPY
Tel. 050 9312126
Cell. 388 9837745
master copy
COPISTERIA
050/9312126 388/9837745

GRADINO IN GENERALE: $\mathcal{L}\{1(t-t_0)\} = \frac{e^{-st_0}}{s}$ NB $t_0 = 0$ $\mathcal{L}\{1(t)\} = 1$

ESPONENZIALE

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{\alpha t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{t(\alpha - s)}\, dt =$$

$$= \left[\frac{e^{t(\alpha-s)}}{\alpha - s}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha - s} = \boxed{\frac{1}{s-\alpha}}$$

se $\alpha = 0$: $\frac{1}{s-0} = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$

SE $\alpha - \mathrm{Re}(s) < 0$

$\mathrm{Re}(s) > \alpha$

α SI DEFINISCE ASCISSA DI CONVERGENZA

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

LINEARITÀ

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) & Re(s) > \alpha_1 \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) & Re(s) > \alpha_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)}$$

$$\boxed{Re(s) > \max(\alpha_1, \alpha_2)}$$

ex TRASFORMATA DEL SIN

$$f(t) = \sin(\omega t)\cdot 1(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2i}\left(e^{+i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) e^{-st}\, dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{2i} e^{t(i\omega - s)}\, dt}_{\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{2i} e^{-t(\omega t + s)}\, dt}_{\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{-i\omega + s} - \frac{1}{s + i\omega}\right] = \frac{\cancel{s} + i\omega - \cancel{s} + i\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{2i} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2i}} \frac{\cancel{2i}\omega}{s^2 + \omega^2} = \boxed{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

se $f(t) = \sin(\omega t + \phi)1(t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \boxed{\frac{\omega\cos\phi + s\sin\phi}{s^2 + \omega^2}}$$

analogamente

TRASFORMATA DEL COS

$$f(t) = \cos(\omega t)\, 1(t)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t) 1(t)\} = \boxed{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

TRASFORMATA DI UNA FZ TRASLATA IN t

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \qquad \alpha < Re(s)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0} F(s)}$$

Dim $\int_0^{+\infty} f(t + t_0)\, e^{-st} = \left[\begin{matrix}\tau = t - t_0 \\ d\tau = dt\end{matrix}\right] = \int_{-t_0}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-s(\tau + t_0)}\, d\tau =$

$$= \cancel{\int_{-t_0}^{0}} + \int_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} f(\tau)\, e^{-s\tau} \cdot e^{+st_0} = e^{-st_0} \cdot F(s) \quad \underline{\text{CVD}}$$

0 (f(t) è definita tra 0 e +∞)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745