GRANDEZZE SCALARI

Sono grandezze che non subiscono alcuna modifica quando il sistema di coordinate viene ruotato.
Per definire una grandezza scalare basta indicarne il suo valore

GRANDEZZE VETTORIALI

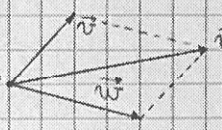
Sono grandezze che subiscono modifiche quando il sistema viene ruotato. Per definire una grandezza scalare dobbiamo indicarne il valore ("modulo"), la direzione e il verso

PROPRIETÀ DEI VETTORI

- Due vettori sono uguali se e solo se hanno modulo, direzione e verso uguali

$$\vec{v} = \vec{w} \iff \begin{cases} \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \\ \text{direz}(\vec{v}) = \text{direz}(\vec{w}) \\ \text{verso}(\vec{v}) = \text{verso}(\vec{w}) \end{cases}$$

- La somma di vettori rispetta la regola del parallelogramma e gode di proprietà associativa e commutativa

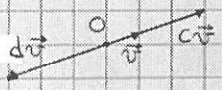


- L'opposto di un vettore mantiene invariati modulo e direzione, ma cambia verso rispetto all'originale



$$\begin{cases} \|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\| \\ \text{direz}(\vec{v}) = \text{direz}(-\vec{v}) \\ \text{verso}(\vec{v}) = -\text{verso}(-\vec{v}) \end{cases}$$

- Moltiplicazione di un vettore per uno scalare non altera mai la direzione del vettore

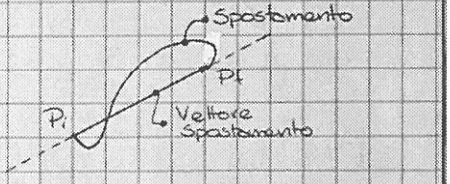


$$\begin{cases} \|c\vec{v}\| = |c| \|\vec{v}\| \\ \text{direz}(\vec{v}) = \text{direz}(c\vec{v}) \\ \text{verso}(\vec{v}) = \pm \text{verso}(c\vec{v}) \end{cases}$$

segno di c

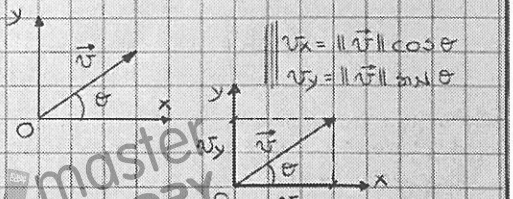
VETTORE SPOSTAMENTO

Il vettore spostamento è un vettore che ha origine in un punto (Posizione iniziale) e termina in un altro punto (Posizione finale).
Un vettore spostamento è completamente noto quando sono note le coordinate del punto di origine e del punto di termine



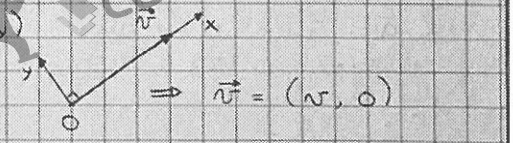
COMPONENTI DI UN VETTORE

Considero un vettore $\vec{v}$ e costruisco un sistema di coordinate Cartesiane (in 2D) avente la stessa origine di $\vec{v}$
Le componenti di $\vec{v}$ sono le proiezioni di $\vec{v}$ sull'asse x (v_x) e sull'asse y (v_y)
Il vettore $\vec{v}$ con questo sistema di coordinate può essere identificato da $\vec{v} = (v_x, v_y)$



$$\begin{cases} v_x = \|\vec{v}\| \cos\theta \\ v_y = \|\vec{v}\| \sin\theta \end{cases}$$

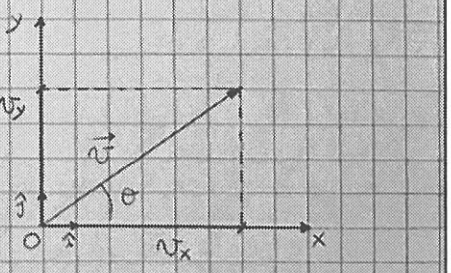
Osservazione
ruotando il sistema di coordinate cambia l'identificazione del vettore



$$\Rightarrow \vec{v} = (v, 0)$$

VETTORI COMPONENTI

Per definire i vettori componenti devo prima definire un VERSORE: un Versore è un vettore di modulo unitario, utilizzato per indicare un verso
Considero i versori $\hat{\imath}$ (lungo x) e $\hat{\jmath}$ (lungo y)
I vettori componenti di $\vec{v}$ sono $v_x \cdot \hat{\imath}$ e $v_y \cdot \hat{\jmath}$
e sono tali che vale la relazione



$$\vec{v} = v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath}$$

CINEMATICA

→ Studia il moto di un corpo, ma non le cause che lo provocano

Punto Materiale (PM)

→ Sistema che può essere considerato privo di dimensioni fisiche (con forma e dimensioni trascurabili), ovvero un punto matematico

Traiettoria (γ)

→ Insieme dei punti nello spazio attraversati dal PM durante il moto

Legge Oraria ($\vec{r}(t)$)

→ Legge che associa ad ogni istante temporale una posizione del PM

MOTO UNIDIMENSIONALE

È un moto che ha come traiettoria una retta



$\vec{r}(t) = \vec{OP}(t) = x(t) \cdot \hat{x}$

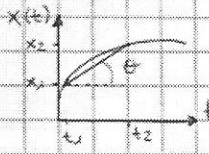
dove $x(t)$ è la componente scalare dipendente dal tempo

$\hat{x}$ è la componente vettoriale indipendente dal tempo

La scrittura $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{x}$ mi permette di scrivere la legge oraria come una grandezza scalare



VELOCITÀ



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan\theta \qquad [\bar{v} \text{ media}]$$

$$v_0 = v(t_0) = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \qquad [v_0 \text{ istantanea}]$$

ACCELERAZIONE



$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \tan\theta \qquad [\bar{a} \text{ media}]$$

$$a_0 = a(v_0) = \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d^2x(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \qquad [a_0 \text{ istantanea}]$$

ESEMPI

- Nota $v(t)$ determinare $x(t)$ $\Rightarrow$ $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ $\Rightarrow$ $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$
  Ho bisogno di conoscere $x(t_0)$; Se $x(t_0) = x_0$ $\Rightarrow$ $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$

- Nota $a(t)$ determinare $v(t)$ $\Rightarrow$ $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ $\Rightarrow$ $v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt'$
  Ho bisogno di conoscere $v(t_0)$; Se $v(t_0) = v_0$ $\Rightarrow$ $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$

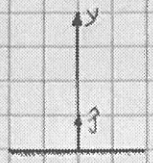
- Nota $a(t)$ determinare $x(t)$ $\Rightarrow$ Ho bisogno di conoscere $x(t_0)$ e $v(t_0)$
  Se $x(t_0) = x_0$ e $v(t_0) = v_0$ $\Rightarrow$ $x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t} a(t'')\,dt''\right]dt'$

CASI PARTICOLARI

- $a(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow$ MOTO RETTILINEO UNIFORME $\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) \\ v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = v_0 \ [\text{costante}] \end{cases}$

- $a(t) = a_0 = \text{cost} \Rightarrow$ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO $\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}a_0 \cdot (t - t_0)^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 \cdot (t - t_0) \end{cases}$

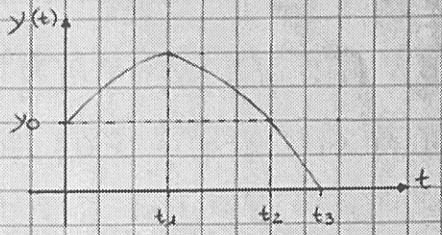
ESEMPIO – MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO
→ CADUTA DI UN GRAVE



$\vec{a} = -g \cdot \hat{j}$ con $g = 9{,}8\ m/s^2$ [a costante]

$y(t_0) = y_0$ quota al tempo t_0
$v(t_0) = v_0$ velocità al tempo t_0
} condizioni necessarie

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2$$



Considero $t_0 = 0$ e pongo $v(t_0) > 0$
ovvero il verso di v_0 è concorde a y

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

master COPY

1- Trovare l'istante t_1 in cui la velocità si annulla ($v(t_1) = 0$):

Graficamente
$t = t_1$ è un massimo $\Rightarrow y'(t_1) = 0$
$y'(t_1) = v_0 - g \cdot t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}$

Fisicamente
so che $v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$; $t_0 = 0$, $t = t_1$
$v(t_1) = v_0 - g \cdot t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = v_0/g$

2- Trovare l'istante t_2 tale che $y(t_2) = y(t_0)$ ($y(t_2) = y_0$):

$y(t_2) = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2 = y_0 \Rightarrow v_0 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 (v_0 - \frac{1}{2} g t_2) = 0$
$t_2 \neq t_0 \neq 0 \Rightarrow v_0 - \frac{1}{2} g t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2 v_0}{g} = 2 t_1$

3- Trovare l'istante t_3 tale che $y(t_3) = 0$:

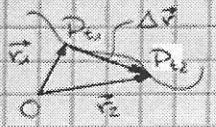
$y(t_3) = y_0 + v_0 \cdot t_3 - \frac{1}{2} g \cdot t_3^2 = 0 \Rightarrow \Delta = v_0^2 + 4 y_0 \cdot \frac{1}{2} g$

$t_3 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 y_0 g}}{(-g)}$ ma $t_3 > 0$ perciò escludo la soluzione negativa

$t_3 = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2 y_0 g}}{(-g)}$

master COPY

MOTO IN PIÙ DIMENSIONI



$\vec{r}_n$ = posizione all'istante t_n

$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$, $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$ } legge oraria

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ $\quad \Delta t = t_2 - t_1$ $\quad \vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta x\cdot\hat{\imath} + \Delta y\cdot\hat{\jmath} + \Delta z\cdot\hat{k}}{\Delta t}\right] = \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]\hat{\imath} + \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right]\hat{\jmath} + \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right]\hat{k}$$

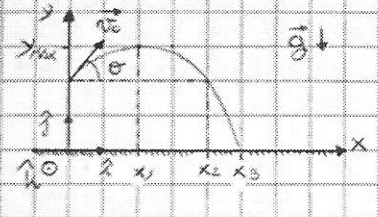
$$= \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\hat{\imath} + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{d}{dt}z(t)\right)\hat{k} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}\right] = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

La relazione $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ è vera in generale

$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$

master COPY

ESEMPIO – MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO
→ MOTO DI UN PROIETTILE



con $t_0 = 0$

$\vec{a} = -g\cdot\hat{\jmath} = \vec{g}$; $\quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$; $\quad \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$;

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\vec{g}\cdot t^2$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$
$\vec{g} = (0, -g, 0)$
$x(t), y(t), z(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\cdot t + 0\cdot t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \\ z(t) = z_0 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\cdot t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \\ z(t) = z_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Moto PLANARE [sul piano xy]}$$

Considero un sistema di riferimento tale che $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = v_{0x}\cdot t$

1 – Ricavare la traiettoria γ

$\begin{cases} v_{0x} = v_0\cdot\cos\theta \\ v_{0y} = v_0\cdot\sin\theta \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} x(t) = v_0\cdot\cos\theta\cdot t \\ y(t) = y_0 + v_0\cdot\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0\cdot\cos\theta} \\ y = y_0 + \dfrac{v_0\cdot\sin\theta}{v_0\cdot\cos\theta}x - \dfrac{1}{2}g\dfrac{1}{v_0^2\cdot\cos^2\theta}x^2 \end{cases}$$

γ: $y = -\dfrac{g}{2v_0^2\cdot\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\, x + y_0$

master COPY COPISTERIA

2 – Ricavare l'altezza massima y_{max} $\quad (\vec{v}(t_1) = (v_{1x}, 0, 0))$

$v_{1y} = \frac{d}{dt}y(t) = v_{0y} - gt_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{v_{0y}}{g}$

$y_{max} = y(t_1) = y_0 + \dfrac{v_{0y}^2}{g} - \dfrac{1}{2}g\dfrac{v_{0y}^2}{g^2} = y_0 + \dfrac{v_0^2\cdot\sin^2\theta}{2g}$

master COPY

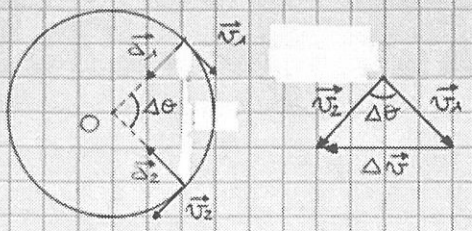
3 – Ricavare la gittata $R = x_3$ $\quad (y(t_3) = 0)$

$y_0 + v_{0y}\cdot t_3 - \frac{1}{2}g\cdot t_3^2 = 0 \Rightarrow \Delta = v_{0y}^2 + 2gy_0 \Rightarrow t_3 = \dfrac{+v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2y_0g}}{+g}$

$$x(t_3) = v_0\cdot\cos\theta\cdot\left[\frac{v_0\cdot\sin\theta + \sqrt{v_0^2\cdot\sin^2\theta + 2y_0g}}{g}\right] = R$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME (velocità v costante)

È un moto che ha come traiettoria una circonferenza



$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \|\vec{a}\| = \frac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t} \simeq \frac{v\cdot\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v\cdot\Delta s}{\Delta t\cdot R} = \frac{v^2}{R}$$

$$\|\vec{a}\| \simeq \frac{v^2}{R} \quad ma \quad \|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R}$$

[accelerazione centripeta]

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R} \qquad \left\{ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R} \right\} \qquad \left\{ T = \frac{2\pi R}{v} \right\}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\omega} = \frac{V}{R} = \vec{\omega}$$

[velocità angolare]

master COPY COPISTERIA

MOTO CIRCOLARE VARIO (velocità v NON costante)

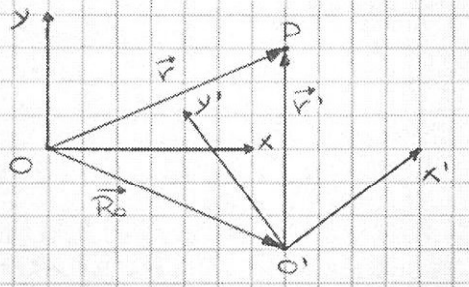
$$\vec{a} = \vec{a_c} + \vec{a_t} \qquad [\vec{a_t}\ \text{accelerazione tangenziale}]$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

$$\begin{cases} \|\vec{a_t}\| = \left\|\frac{dv}{dt}\right\| \\ \|\vec{a_c}\| = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

MOTI RELATIVI (Trasformazione Galileiana tra due sistemi in moto traslatorio)

Per avere un moto traslatorio non ci devono essere rotazioni tra gli assi di rif.



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R_0}$$

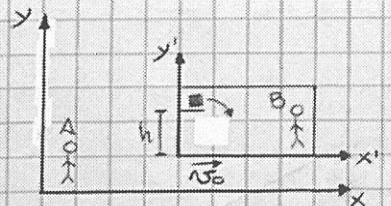
$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v} - \vec{V_0}$$

$\vec{v}'$: Velocità RELATIVA — $\vec{v}$: Velocità ASSOLUTA — $\vec{V_0}$: Velocità di TRASCINAMENTO

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{a} - \vec{A_0}$$

Queste trasformazioni sono vere se il tempo nei due sistemi di riferimento scorre allo stesso modo;
Se la velocità di un sistema NON è trascurabile rispetto alla velocità della luce allora devo ricorrere alla Teoria della Relatività

ESEMPIO – MOTI RELATIVI



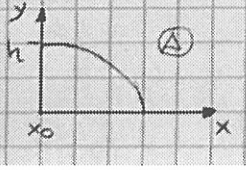
1- Traiettoria della valigia rispetto ad A

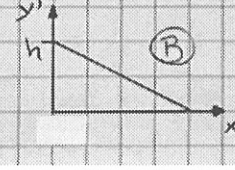
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow y = h - \frac{1}{2} g \left[\frac{x - x_0}{v_0}\right]^2$$

2- Traiettoria della valigia rispetto a B con $D > 0$ modulo della Decelerazione ($v_0 = 0$)

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}_{treno} = +D\hat{x} - g\hat{j} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = -g\hat{\jmath} = -g\hat{\jmath}' \\ \vec{A_T} = -D\hat{\imath} = -D\hat{\imath}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 0 + 0 + \frac{1}{2} a'_x t^2 = +\frac{1}{2} D t^2 \\ y'(t) = h + 0 + \frac{1}{2} a_y t^2 = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = h - \frac{g}{D} x'$$





master COPY