Alfabeto Greco

minuscole	maiuscole	come si legge
α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
ϑ	Θ	teta
ι	I	iota
κ	K	cappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu / mi
ν	N	ni / nu
ξ	Ξ	csi
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	ro
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Y	ipsilon
φ	Φ	fi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

master copy

© 2019 - www.matematika.it


master
COPY

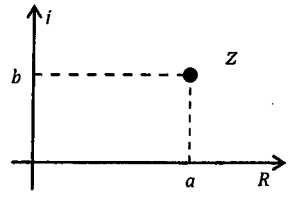

master
COPY


master
COPY

Numeri complessi: approfondimento

rappresentazione nel piano complesso (piano di Gauss) di un numero complesso z

forma algebrica

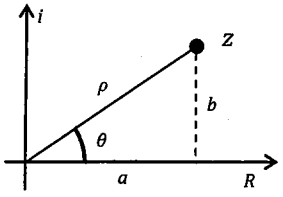


$z = a + ib$

a = parte reale

b = parte immaginaria

forma trigonometrica



$z = \rho(cos\theta + i\, sen\theta)$

ρ = modulo

θ = anomalia

passaggio dalla forma algebrica a quella trigonometrica

$$z = a + ib = \rho cos\theta + i\,\rho sen\theta = \rho(cos\theta + i\, sen\theta)$$

- $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ per il teorema di Pitagora
- $tg\theta = \frac{b}{a} \rightarrow \theta = arctg\frac{b}{a}$ per le relazioni di trigonometria dei triangoli rettangoli si ha:

per determinare l'angolo θ è necessario tenere conto dei segni di a e b per individuare il quadrante in cui si trova il punto z e di conseguenza l'angolo θ (vedi i seguenti esempi)

$z = 1 + i\sqrt{3}$ $a = 1$ e $b = \sqrt{3} \rightarrow \rho = \sqrt{1+3} = 2$; $tg\theta = \sqrt{3}$ cioè $\vartheta = \frac{\pi}{3} \rightarrow z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\, sen\frac{\pi}{3}\right)$

$z = -1 - i\sqrt{3}$ $a = 1$ e $b = -\sqrt{3} \rightarrow \rho = \sqrt{1+3} = 2$; $tg\theta = \sqrt{3}$ cioè $\vartheta = \frac{4}{3}\pi \rightarrow z = 2\left(cos\frac{4}{3}\pi + i\, sen\frac{4}{3}\pi\right)$

per passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica basta calcolare i valori del seno e coseno e sviluppare i calcoli

potenza n-sima di un numero complesso in forma trigonometrica (formula di De Moivre)

$$z = \rho(cos\,\theta + i\, sen\,\theta) \rightarrow z^n = \rho^n(cos\, n\theta + i\, sen\, n\theta)$$

Esempio: $z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\, sen\frac{\pi}{3}\right)$ *elevato alla quinta* $\rightarrow z^5 = 2^5\left(cos\frac{5}{3}\pi + i\, sen\frac{5}{3}\pi\right) = 32\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 - i\,16\sqrt{3}$

radice n-sima di un numero complesso in forma trigonometrica

$$z = \rho(cos\theta + i\, sen\theta) \rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\, sen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad \text{con k = 0,1,2,...,n-1}$$

Esempio: $z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\, sen\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\, sen\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$ con k = 0 e k = 1 cioè:

k = 0 $\rightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\, sen\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

k = 1 $\rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{2} + i\, sen\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{7}{6}\pi + i\, sen\frac{7}{6}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

nel campo complesso la radice n-sima di un numero ha sempre n soluzioni, ciò implica che non si può effettuare la semplificazione tra l'indice della radice e l'esponente del radicando, cioè: $\sqrt[6]{z^4} \neq \sqrt[3]{z^2}$ altrimenti si perdono soluzioni

forma esponenziale di un numero complesso

la forma esponenziale di un numero complesso z è: $z = \rho e^{i\theta}$

si ottiene applicando alla forma trigonometrica $z = \rho(cos\theta + i\, sen\theta)$ la formula di Eulero $e^{i\theta} = (cos\theta + i\, sen\theta)$

© 2013 - www.matematika.it

Numeri Complessi

numeri immaginari

- si chiama **unità immaginaria** e si indica con i la radice quadrata di -1 : $i = \sqrt{-1}$
- un **numero immaginario** si ottiene dalla radice quadrata di un numero negativo

ad esempio:

$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$	$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$	$\sqrt{-20} = \sqrt{20 \cdot (-1)} = 2\sqrt{5}i$

- le **potenze di i** si ripetono di 4 in 4 infatti:

$i = \sqrt{-1}$	$i^2 = i \cdot i = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -\sqrt{-1} = -i$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = \sqrt{-1}$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -\sqrt{-1} = -i$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

in generale $i^n = i^r$ con r resto della divisione di n per 4. Ad esempio: $i^{27} = i^3$ perchè $27:4 = 6$ con resto $r = 3$

numeri complessi (forma algebrica)

- un **numero complesso z** è la somma di un numero reale e di un numero immaginario: $z = a + ib$

  Esempio: $z = 2 + 3i$ $z = 3 - 5i$ $z = -2 + 7i$ $z = \sqrt{2} + \sqrt{7}i$

- due numeri complessi si dicono **coniugati** se hanno la stessa parte reale e la parte immaginaria opposta.

  Esempio: $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 2 - 3i$ sono numeri complessi coniugati

operazioni tra numeri complessi

Dati due numeri complessi $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 5 - 4i$

Somma: si sommano le parti reali e le parti immaginarie	$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (5 - 4i) = 8 - 2i$
Prodotto: si effettuano i prodotti tra i due binomi ricordando che $i^2 = -1$	$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (5 - 4i) = 15 - 12i + 10i - 8i^2 = 15 - 2i + 8 = 23 - 2i$
Rapporto: si moltiplica e si divide il rapporto dei due numeri per il complesso coniugato del denominatore	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{5 - 4i} \cdot \frac{5 + 4i}{5 + 4i} = \frac{7 + 22i}{41} = \frac{7}{41} + \frac{22}{41}i$
Potenza: si effettua la potenza del binomio	$(z_1)^2 = (3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$

Per la *potenza*: se l'esponente è maggiore di 3 conviene usare la formula di De Moivre (vedi scheda di approfondimento)

esempio

risolviamo la seguente equazione di secondo grado a **coefficienti reali** nel campo complesso:

$$x^2 - 4x + 20 = 0 \rightarrow x = 2 \mp \sqrt{4 - 20} \rightarrow x = 2 \mp \sqrt{-16} \rightarrow x = 2 \mp 4i$$

© 2013 - www.matematika.it

09/10/18

Esercizio: Troviamo la forma algebrica del numero complesso

$$\underbrace{\frac{1+i}{1-i}+\frac{1+2i}{1+i}}_{③} \in \mathbb{C}$$

① ②

L'inverso si fa con il coniugato ed il quadrato della sua norma

Si potrebbe trovare la forma algebrica di ogni addendo separatamente

① $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)}{1-i}\cdot\frac{(1+i)}{1+i} = \frac{1-1+2i}{2} = \frac{2i}{2} = i$

coniugato di $1+i$

② $\frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+2i+2}{2} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

③ $\underbrace{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}_{②} + \underbrace{i}_{①} = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ ⇒ somma dei numeri

Altro metodo:

$$\frac{1+i}{1-i}+\frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+i)(1+i)+(1+2i)(1-i)}{(1-i)(1+i)=2} = \frac{2i+3+i}{2} = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

Esempio: Rappresentare nel piano complesso

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z-1|\}$$

Proprietà:

1) $|z|^2 = z\cdot\bar{z} \iff |z| := \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

con $\bar{z}$ complesso coniugato di z

Dato che $|z| = |z-1|$ sono negativi $\iff |z|^2 = |z-1|^2$

Il che è uguale a scrivere

$$z\bar{z} = (z-1)(\bar{z}-1) = (z-1)(\bar{z}-1)$$

$$z\bar{z} = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = z+\bar{z} = 1$$