Insiemi

DEF: INSIEME := collezione di oggetti

Un insieme si può definire:

(i) descrivendo esplicitamente gli elementi

(es) $S = \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{\text{numeri dispari da } 0 \text{ a } 10\}$

(ii) utilizzando insiemi già noti

(es) $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n/2 \notin \mathbb{N} \text{ e } 0 < n < 10\}$

DEF: T è un SOTTOINSIEME di S se:

$\forall t \in T,\ t \in S$ e si indica $T \subset S$ oppure $\subseteq$

(es) $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ $\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$

L'ordine in cui scrivo gli elementi non è importante:

$S = \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

PROP: $T = S \iff T \subset S$ e $S \subset T$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

Le operazioni definite tra insiemi sono:

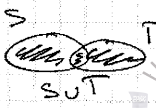
- INTERSEZIONE ($T \cap S$):

$T \cap S = \{x \mid x \in T \text{ e } x \in S\}$



- UNIONE ($T \cup S$):

$T \cup S = \{x \mid x \in T \text{ o } x \in S\}$



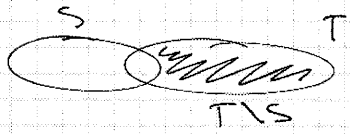
- PRODOTTO ($S \times T$):

$S \times T = \{(s, t) \mid s \in S \text{ e } t \in T\}$ (coppie ordinate)

$S^n = \underbrace{S \times \dots \times S}_{n \text{ volte}} = \{(s_1, \dots, s_n) \mid s_i \in S\}$

- DIFFERENZA ($T \setminus S$):

$T \setminus S = \{x \mid x \in T \text{ e } x \notin S\}$



MASTER COPY
Tel. 050 831226
Cell. 388 9837745
master COPY

• COMPLEMENTARE ($C_S(T)$)

$$C_S(T) = S - T \quad \text{con} \quad T \subset S$$

Induzione

Assumiamo come intuitivamente vero il principio di induzione:

$E(n) :=$ proposizione $n \in \mathbb{N}$

se $(E(1)$ è vero e $E(n)$ vera $\Rightarrow E(n+1)$ vera$) \Rightarrow E(n)$ è vera $\forall n$

(es) $E(n) =$ "$\forall n \in \mathbb{N},\ 1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$"

Passo base: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ vera $\Rightarrow E(1)$ vero

Passo induttivo: se $E(n)$ è vera:

$$1+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$$

DEF: Dato $n, K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\binom{n}{K} := \frac{n!}{K!(n-K)!} \quad \text{con} \quad n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 1 & \text{se } n>0 \end{cases}$$

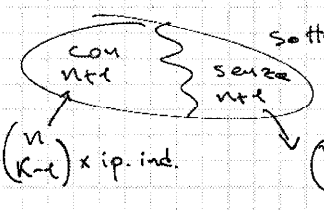
PROP: Sia $S(n,K)$ il numero di sottoinsiemi di K elementi di un insieme di n elementi:

$$S(n,K) = \binom{n}{K}$$

Passo base: $S(1,0) = 1 \quad \binom{1}{0} = 1$

$S(1,1) = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$ ✓

Passo induttivo: Consideriamo fissato un sottoinsieme con K elementi, esso può contenere $n+1$ o no:



$\binom{n}{K-1}$ × ip. ind. $\qquad \binom{n}{K}$ × ip. ind.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$S(n,K) = \binom{n}{K-1} + \binom{n}{K} = \frac{n!}{(n-K)!K!} + \frac{n!}{(n-K+1)!(K-1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-K+1) + n!(K)}{(n-K+1)!\,K!} =$$

$$= \frac{n!\,(n-K+1+K)}{(n-K+1)!\,K!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-K)!\,K!} = \binom{n+1}{K}$$

Funzioni

master COPY

DEF: APPLICAZIONE / FUNZIONE := legge che dati due insieme S (dominio) e T (codominio)

master COPY
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Numeri complessi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$x^2-2=0$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$, ma in $\mathbb{R}$: $x = \pm\sqrt{2}$

$x^2+1=0$ non ha radici reali. Aggiungo perciò un altro elemento: $i = \sqrt{-1}$ in modo da ottenere un nuovo campo:

DEF: $$\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\} \quad \text{con } i^2=-1$$

(a: parte reale $Re(z)$; b: parte immaginaria $Im(z)$)

Affinché $\mathbb{C}$ sia un campo devo introdurre operazioni di somma e prodotto e definire elementi neutri:

DEF: $$+ : (a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) := (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

$$\cdot : (a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i) := a_1a_2 + a_1b_1i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

Si verifica che ponendo $0 := 0+0i$ e $1 := 1+0\cdot i$:

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $a \in \mathbb{R} \to a = a+0\cdot i$

Si può anche definire $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$:

$$(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b')$$

$$(a,b)\cdot(a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b)$$

$$0 := (0,0) \qquad 1 := (1,0)$$

Supponiamo $(a+bi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{ab-ab}{a^2+b^2}i = 1$$

($\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$: INVERSO)

master COPY

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DEF: CONIUGIO: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z = a+bi) = a-bi = \overline{z}$ → coniugato di z

OSS: $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 + (ab-ab)i = a^2+b^2 \qquad z \cdot \overline{z} \geq 0$

DEF: modulo di z: $|z| := \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ perciò $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2$

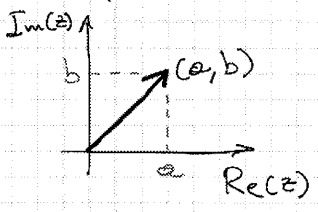
Possiamo ora scrivere l'inverso in modo più compatto:

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad z = a+bi \to \text{forma algebrica}$$

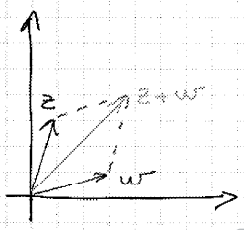
(es) Determiniamo la forma algebrica di $z = \frac{2-i}{3+i}$

$$z = \frac{(2-i)(3-i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6-5i+i^2}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

OSS: Possiamo pensare i numeri complessi come coppie di reali e rappresentarli come parti del piano in un opportuno sistema di assi, o come il segmento orientato che congiunge il centro al punto di coordinate (a,b)



In questo modo viene resa meglio l'idea di somma di numeri complessi



(es) Rappresentiamo nel piano:

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z-1| \}$$

$|z| = |z-1| \Rightarrow z\overline{z} \overset{!}{=} (z-1) \cdot (\overline{z-1}) = (z-1) \cdot (\overline{z}-1) \overset{!}{=} z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 \Rightarrow z + \overline{z} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+bi+a-bi = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$