• DEFINIZIONI E TEOREMI

CONTINUITÁ $\quad \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x \in \text{Dominio di } f$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

LIMITE / SUCCESS. CONVERGENTE

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu : \forall n > \nu \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

① Th. Somma dei limiti é limite della somma

Ip. 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

2) $\lim_{n\to\infty} b_n = M$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = L+M$

DIMO// 1) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_1 : \forall n > \nu_1 \quad |a_n - L| < \varepsilon$

2) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_2 : \forall n > \nu_2 \quad |b_n - M| < \varepsilon$

$$\varepsilon > |a_n + b_n - [L+M]| \overset{\text{SHWARZ}}{\leq} |(a_n + b_n)| - |(L+M)|$$

devo fare vedere che:

$\forall n > \nu_1 \quad |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ e che

$\forall n > \nu_2 \quad |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

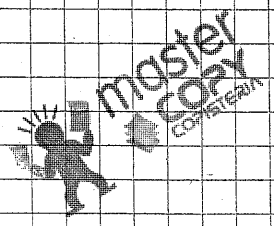
devo allora prendere $n > \max\{\nu_1, \nu_2\}$

e ottengo la TESI

cioé $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu : \forall n > (\nu) \quad |a_n + b_n - (L+M)| < \varepsilon$

↓

scelto tra max di tutti é (ν)



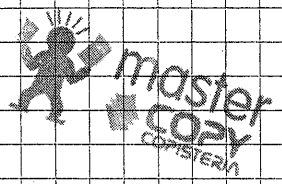
② Th. La composta di due continue è continua

Ip. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

1) f continua in x_0

2) g continua in $f(x_0)$



Dimo

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in$ dominio f

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

2) $\forall \sigma > 0 \ \exists \eta > 0 : \forall y \in$ dominio di g

$|y - f(x_0)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \sigma$

devo ora vedere la seguente TESI

$\forall \sigma > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } g(f(x))$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g f(x_0)| < \sigma$

se però considero un $\eta = \varepsilon$ vedo che

$|f(x) - f(x_0)| < \eta$

poiché dall'ipotesi ① ho che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

1) $f(x) \in \text{dom } g$ verificata

2) $|f(x) - f(x_0)| < \eta$

↳ dunque dalle 2 considerazioni ottengo la TESI

③ Th. degli zeri (esteso in $\mathbb{R}^n$)

INSIEME CONNESSO (concetto introdotto per aggiungere ipotesi al teorema degli zeri)

supponiamo di avere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Ω si dice Connesso se $\forall\, x_1, x_2 \in \Omega$

$\exists\ \gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ continua in $[0,1]$

: $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$

TEOREMA ZERI

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

Ip. 1) f continua in Ω

2) Ω è un insieme Connesso

3) $\exists\ x_1, x_2 \in \Omega : f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

(TS) $\Rightarrow$ $\exists\ \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$

2) $\longrightarrow$ per insieme connesso $\exists\ \gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ continua in $[0,1]$: $\forall\, x_1, x_2 \in \Omega$ $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$

creo adesso una $\boxed{h(t) = f(\gamma(t))}$

I) dominio h $[0,1]$

II) h è CONTINUA per composizione continue

III) per ipotesi $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

connesso $\rightarrow$ $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$

dunque $f(\gamma(0)) \cdot f(\gamma(1)) < 0$

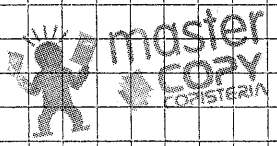
$\Rightarrow$ $[h(0) \cdot h(1) < 0]$ posso dunque applicare TH. ZERI a h

applicando dunque il Th. degli zeri in $\mathbb{R}$

$\exists\ (\bar{t}) \in [0,1]$: $h(\bar{t}) = 0$ cioè $f(\gamma(\bar{t})) = 0$

ottengo la tesi semplicemente

ponendo $\boxed{\bar{x} = \gamma(\bar{t})}$.



- **DEFINIZIONI SU INSIEMI**

INTERVALLO $(\mathbb{R}^1) \rightarrow \{x : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = A$ (intervallo)

$(\mathbb{R}^n) \Rightarrow B_\delta(x_0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \delta\}$

↳ il concetto di INTERVALLO "lineare" in $\mathbb{R}$ viene sostituito con il concetto di sfera (aperta o chiusa) in $\mathbb{R}^n$

I) **INSIEME LIMITATO** $\exists\ B_\delta(x_0) \supseteq \Omega$ cioè

$$\left[\exists\ \delta > 0 : \forall\ x \in \Omega \quad |x| \leq \delta\right]$$

II) **INSIEME non LIMITATO** $\nexists\ B_\delta(x_0) \supseteq \Omega$ cioè

$$\left[\forall\ \delta > 0\ \exists\ \bar{x} \in \Omega : \bar{x} \notin B_\delta(x_0)\right]$$

cioè non c'è una sfera che contenga tutti elementi

sfera è contenuto in Ω

- **DEFINIZIONI SUI PUNTI**

Punto INTERNO x_0 è interno a Ω se $\exists\ \delta : B_\delta(x_0) \subseteq \Omega$

Punto ESTERNO x_0 è esterno a Ω se $\exists\ \delta : B_\delta(x_0) \cap \Omega = \emptyset$

↳ intersezione Ω e sfera è nulla

Punto DI FRONTIERA x_0 è di FRONTIERA

$\forall\ \delta > 0 \quad \exists\ x \in \Omega$ e $\exists\ y \notin \Omega$: $x, y \in B_\delta(x_0)$

① → INTERVALLO APERTO se ogni suo punto è PUNTO INTERNO

② → INTERVALLO CHIUSO se ogni suo PUNTO di FRONTIERA è appartenente a Ω

INSIEME COMPATTO se tale insieme è chiuso e limitato

- CHIUSO se ~~tutti~~ i suoi punti sono ~~INTERNI~~
- LIMITATO $\exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in \Omega \quad |x| \leq \delta$ → VEDI SOPRA

④ Th. WEIRSTRASS

una funzione in un insieme compatto

=> ammette MAX e MIN

⑤ Th. Permanenza del Segno

sia $f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Ip 1) f continua in Ω

2) $f(x_0) > 0$

$\Rightarrow$ $\left[\exists\, \delta : f(x) > 0 \quad \forall\, x \in B_\delta(x_0)\right]$

DIMO// considero un $\boxed{\bar{\varepsilon} < f(x_0)}$

↳ $\bar{\varepsilon}$ deve essere abbastanza piccolo

→ per la continuità ho che

$\forall\, \delta > 0 : \quad x \in$ dominio di f

$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \bar{\varepsilon}$

↳ sono in $\mathbb{R}$

— svolgo e ottengo che $f(x_0) - \bar{\varepsilon} > f(x) > f(x_0) + \bar{\varepsilon}$

dato che $\bar{\varepsilon}$ piccolo $f(x_0) - \bar{\varepsilon} > 0$

=> dunque $[f(x) > 0]$ perché nella disuguaglianza sta tra 2 cose positive (TESI)